方程式と不等式

例題 1

次の 1 次方程式を解け.

(1) $3x+5=4$

(2) $x-2=3x+1$

(3) $\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{3}=1$

(1)

$$\begin{aligned} 3x+5 &= 4 \\ 3x &= 4-5 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x-2 &= 3x+1 \\ x-3x &= 1+2 \\ -2x &= 3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{3}=1$

両辺に 12 をかけると,

$$\begin{aligned} 9x+4 &= 12 \\ 9x &= 12-4 \\ 9x &= 8 \\ x &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

[1] 次の方程式を解け.

(1) $x+1=-3x+2$

(2) $2(2x-1)+3=5$

(3) $\dfrac{3x-1}{2}=\dfrac{x+4}{3}$

例題 2

次の２次方程式を解け．

(1) $x^2-6x+5=0$

(2) $ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0)$

(3) $ax^2+2b'x+c=0, \quad (a\neq 0)$

(1) 因数分解ができるときは，因数分解を使う方が便利です．
どうしても因数分解が見つからないときは，(2),(3) の２次方程式の解の公式を使ってください．
$x^2-6x+5=0$
$(x-2)(x-3)=0$
$x=2,\ 3$

(2) $ax^2+bx+c=0, \quad (a\neq 0)$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \qquad (x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2)-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=0, \qquad (x+\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}, \qquad (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}, \qquad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \mathbf{x}=\frac{\mathbf{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}}{\mathbf{2a}}$$

(3) $ax^2+2b'x+c=0, \quad (a\neq 0)$

(2) より，$x=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

すなわち，$\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}}{\mathbf{a}}$

(2) と (3) は，２次方程式の解の公式です．覚えて，自由に使えるようにしてください．

[2] 次の２次方程式を解け．

(1) $x^2+2x-8=0$

(2) $x^2+3x-5=0$

(3) $3x^2-4x-8=0$

(4) $3x^2+5x+2=0$

(5) $2x^2+2x+\ =0$

(6) $x^2-4x+4=0$

(7) $-0.2x^2+0.9x-1/1=0$

(8) $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{6}x+6\sqrt{2}-4=0$

[3] 次の方程式を解け．

(1) $x^4-3x^2+2=0$

(2) $x^2-(2a+b)x+a^2+ab=0$

(3) $(x+3)^2-16=0$

(4) $\dfrac{x+3}{x-2}=3x-7$

例題 3

次の２次方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1) $3x^2+4x+8=0$

(2) $x^2-5x+4=0$

(3) $x^2-6x+9=0$

２次方程式の解の判別式：

$$D=b^2-4ac \quad \text{または，} \quad \frac{D}{4}=b'^2-ac$$

これらは，２次方程式の解の公式の根号の中身です．
２次方程式は，

$$\begin{cases} D>0 \text{ のとき　異なる２個の実数解} \\ D=0 \text{ のとき　重解（２個の解が同じ値を持つと考える）} \\ D<0 \text{ のとき　異なる２個の虚数解} \end{cases}$$

を持つ．

(1) $3x^2+4x+8=0$

$\frac{D}{4}=2^2-3\cdot 8=4-24=-20<0$

よって，方程式の異なる実数解の個数は，0 個．

(2) $x^2-5x+4=0$

$D=(-5)^2=4\cdot 1\cdot 4=25-16=9>0$

よって，方程式の異なる実数解の個数は，2 個．

(3) $x^2-6x+9=0$

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot 9=9-9=0$

よって，方程式の異なる実数解の個数は，1 個.（重解）

[4] 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1) $x^2+18x+81=0$

(2) $x^2+bx+7=0$

(3) $ax^2+5x-2=0$

例題 4

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

の２つの解を α, β とするとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を a, b, c を用いて表せ.

２次方程式の解と係数の関係です.

$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$ の２つの解は,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ゆえに,

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

また,

$$\alpha\cdot\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

α, β を２つの解とする２次方程式は,

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta=0$$

も，覚えておいてください.

[5] α と β を $x^2+3x-5=0$ の２つの解とするとき，次の値を求めよ.

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2+\beta^2$

(4) $\alpha^3+\beta^3$

(5) $(\alpha-\beta)^2$

(6) $(\alpha^3+\alpha^2+1)(\beta^3+\beta^2+1)$

例題 5

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (a \neq 0)$$

の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式を $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて表せ．

(1) $\alpha+\beta+\gamma$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $\alpha\beta\gamma$

$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (a \neq 0)$ の 3 つの解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ だから，

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解ができる．(因数定理より）
右辺を展開して，整理すると，

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

両辺の係数をくらべると，

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma), \quad c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha), \quad d=-a\alpha\beta\gamma$$

よって，

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha+\beta+\gamma & = & -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha & = & \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma & = & -\dfrac{d}{a} \end{array}\right.$$

[6] $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を $x^3-2x^2-4=0$ の 3 つの解とするとき，次の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

(4) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

[7] $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を $x^3+3x^2-x+1=0$ の 3 つの解とするとき，次の 3 つの数を解とする 3 次方程式を一つ作れ．

(1) $\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1$

(2) $\dfrac{1}{\alpha-1},\ \dfrac{1}{\beta-1},\ \dfrac{1}{\gamma-1}$

例題 6

次の方程式を複素数 $\mathbb{C}$ の範囲で解け.

(1) $x^3 - 1 = 0$

(2) $12x^3 + 8x^2 - x - 1 = 0$

(3) $x^5 - 1 = 0$

(1) $x^3 - 1 = 0, \qquad (x-1)(x^2+x+1) = 0, \qquad x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) $12x^3 + 8x^2 - x - 1 = 0, \qquad (3x-1)(2x+1)^2 = 0, \qquad x = \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{2}$

(3) $x^5 - 1 = 0, \qquad (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$

ここで，方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を解こう.

$x \neq 0$ として，両辺を x^2 で割ると，$x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0, \quad (x+\dfrac{1}{x})^2 + (x+\dfrac{1}{x}) - 1 = 0$

$t = x + \dfrac{1}{x}$ とおくと，$t^2 + t - 1 = 0, \qquad t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

ゆえに，$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad 2x^2 + (1 \pm \sqrt{5})x + 2 = 0$

$x = \dfrac{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{10+2\sqrt{5}}i}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}i}{4}$

以上より，求める解は，$x = 1, \dfrac{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{10+2\sqrt{5}}i}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}i}{4}$

この方程式の解は，複素数の極形式を用いて表すと，簡単な式になります.

[8] 次の方程式を複素数 $\mathbb{C}$ の範囲で解け.

(1) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(2) $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$

(3) $x(x+1)(x=2) = 4 \cdot 5 \cdot 6$

(4) $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$

[9] 方程式 $x^3 - 3x^2 - 12x + 3ax + 16 = 0$ が正の実数解 a をもつとき，a の値と他の解を求めよ.

[10] 方程式 $x^3 + ax^2 + 9x + b = 0$ が $1 - 2i$ を解にもつとき，実数 $a,\ b$ の値と他の解を求めよ.

[11] ω を $x^3 = 1$ の虚数解の一つとするとき，$\omega^2 + \omega$ と $\omega^{30} + \omega^{29} + \omega^{28}$ の値を求めよ. .

例題 7

次の不等式を解け.

(1) $5x+3<2$

(2) $6x^2-x-1<0$

(3) $x^2+6x-7>0$

(4) $x^2+x+1\leq 0$

(5) $x^2-6x+9\leq 0$

(1) $5x+3<2,\quad 5x<-1,\quad x<-\dfrac{1}{5}$

(2) $6x^2-x-1<0,\quad (3x+1)(2x-1)<0,\quad -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$

(3) $x^2+6x-7>0,\quad (x+7)(x-1)>0,\quad x<-7, 1<x$

(4) $x^2+x+1\leq 0,\quad (x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}\leqq 0$

$(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}\geqq\dfrac{3}{4}>0$ だから，このような実数 x は存在しない.

(5) $x^2-6x+9\leq 0,\quad (x-3)^3\leqq 0$

$(x-3)^3\geqq 0$ だから，不等式の解は，$x=3$

[12] 次の不等式を解け.

(1) $6x-4>0$

(2) $-3x+9<0$

(3) $-x^2-4x+21>0$

(4) $2x^2+5x-8>0$

(5) $x^2-4x+4>0$

(6) $-x^2+2x-5>0$

例題 8

次の不等式を解け．

(1) $x^3-3x+2>0$

(2) $\dfrac{1}{x-2}\geq 1$

(3) $3|x-3|-2|x+1|\geq 0$

(1) $x^3-3x+2>0$
$(x-1)^2(x+2)>0$
$x\neq 1$ かつ $x+2>0$
よって，$-2<x<1,\ 1<x$

(2) $\dfrac{1}{x-2}\geq 1$
(分母)^2 を両辺にかけると，不等号の向きが変わらない．
(分母) $\neq 0$ だから，$x\neq 2$.
両辺に $(x-2)^2$ をかけると，
$\dfrac{(x-2)^2}{x-2}\geqq (x-2)^2$ $x-2\geqq (x-2)^2$ $\quad x-2\geqq x^2-4x+4$ $x^2-5x+6\leqq 0$ $\quad (x-2)(x-3)\leqq 0$
よって，$2<x\leqq 3$

(3) $3|x-3|-2|x+1|\geq 0$
i) $x<-1$ のとき，
$3(x-3)-2(x+1)\geqq 0,\quad x-11\geqq 0,\quad x\geqq 11$
$x<-1$ だから，この範囲には解はない．
ii) $-1\leqq x<3$ のとき，
$3(x-3)-2(-x-1)\geqq 0,\quad 5x-7\geqq 0,\quad x\geqq \dfrac{7}{5}$
$-1\leqq x<3$ だから，$\dfrac{7}{5}\leqq x<3$
iii) $3\leqq x$ のとき，
$3(-x+3)-2(-x-1)\geqq 0,\quad -x+11\geqq 0,\quad x\leqq 11$
$3\leqq x$ だから，$3\leqq x\leqq 11$
以上より，求める解は，$\dfrac{7}{5}\leqq x\leqq 11$

[13] 次の不等式を解け.

(1) $x^4 + 3x^3 - x - 3 \leq 0$

(2) $\dfrac{3}{x+1} > 5$

(3) $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{2}{x+3}$

(4) $x^2 + 3|x| - 4 \leq 0$

(5) $|x^2 - 9| < x + 1$

[14] 次の連立不等式を解け.

(1) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 & < & 0 \\ 2x^2 - 7x - 4 & \geq & 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2 - 2x + 3 & > & 0 \\ -x^2 + x + 4 & > & 0 \end{cases}$