数学 IA　入試問題演習

[1] 次で与えられた 4 つの実数を小さい方から順に並べて，a, b, c, d を用いて，解答用紙（省略）に書け。

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}},\quad b = \sqrt{15}-2,\quad c = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}},\quad d = \sqrt{3}$$

(神戸薬科大)

[2] (1) 整式 $(x^3+x^2+x+1)^2$ を x^3-1 で割った余りは，$\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 整式 $x^{3n}+1$（ただし，n は正の整数）を x^3-1 で割った余りは，$\boxed{\text{エ}}x^2+\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) 整式 x^{20} を x^3-1 で割った余りは，$\boxed{\text{キ}}x^2+\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}$ である。

(青山学院大)

[3] a, b, c を相異なる実数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3$ を因数分解すると $(a-b)(a-c)(b-c)\times\boxed{\text{ア}}$ となる。

(2) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を計算すると $\boxed{\text{イ}}$ となる。

(横浜市立大)

[4] x, y, z は $xyz=1$ を満たす実数とする。次の 2 つの不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \leqq x^2+y^2+z^2$

(2) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2} < \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^2$

(信州大)

[5] $x > 0,\ y > 0$ とする。いま，$x,\ y$ に関する次の 4 つの条件①〜④がある。

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 < 0$ ………………… ①

$|y - 2| < x$ ………………… ②

$\sqrt{x + 2xy + y} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ………………… ③

$(x + y)^2 > 4$ ………………… ④

このとき，次の (1)〜(5) について，(1)〜(3) は文中の $\boxed{}$ の中に入れるべき①〜④の記号を，(4) は反例を，(5) は証明を，それぞれ解答欄（省略）に記入せよ。

(1) 4 つの条件①〜④のうちで，条件 $\boxed{\text{ア}}$ は $xy > 1$ であるための必要十分条件である。

(2) 4 つの条件①〜④のうちで，条件 $\boxed{\text{イ}}$ は $xy > 1$ であるための十分条件であるが必要条件でない。

(3) 4 つの条件①〜④のうちで，条件 $\boxed{\text{ウ}}$ は $xy > 1$ であるための必要条件であるが十分条件でない。

(4) (3) について，条件 $\boxed{\text{ウ}}$ が $xy > 1$ であるための十分条件でないことを示す反例をあげよ。ただし，その反例における $x,\ y$ の値は，いずれも 5 を分母とする既約分数で，$\dfrac{1}{2} < x < y < 2$ を満たすものとすること。

(5) (3) について，条件 $\boxed{\text{ウ}}$ が $xy > 1$ であるための必要条件であることを証明せよ。

(新潟薬科大)

[6] 実数 c に関する以下の条件 $(*)$ を考える： $(*)\ |c| \leqq 2$

以下の (1) から (6) の c に関する条件がそれぞれ上の条件 $(*)$ が成り立つための

（イ）必要条件であるが，十分条件ではない，

（ロ）十分条件であるが，必要条件ではない，

（ハ）必要十分条件である，

（ニ）必要条件でも十分条件でもない，

のいずれであるかを考え，その理由を説明せよ。

(1) $c \leqq 2$

(2) $c^2 - 2 \leqq 0$

(3) すべての実数 x に対して $x^4 - c \geqq 0$,

(4) ある実数 x があり $(x-1)^2 + c^2 \leqq 4$ となる。

(5) $x < 1$ ならば $cx < 2$,

(6) x の 2 次方程式 $x^2 + cx + 1 = 0$ は実数解をもたない。

(お茶の水大)

[7] 次の問いに答えよ。ただし，数値はすべて 10 進数とする。

(1) 7^{12} の 1 の位を求めよ。

(2) n が自然数のとき，117^n の 1 の位は 1, 3, 7, 9 のいずれかであることを証明せよ。

(3) 117^{2002} の 1 の位を求めよ。

(新潟大)

[8] a, b, c を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a が 3 の倍数でないならば，$a^2 - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき，a, b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ。

(3) a, b が互いに素で，$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき，c は奇数であることを示せ。

(関西学院大)

[9] k, x, y は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}, \dfrac{k}{y}, \dfrac{1}{xy}$ で，周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。

(一橋大)

[10] 関数 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$ の最小値を求めなさい。

(熊本県立大)

[11] 次の問いに答えよ.

(1) 二次方程式の 2 つの解が -3 と 5 で，一次の係数は 4 とする。このとき，二次の係数は $\boxed{\textbf{アイ}}$ であり，定数項は $\boxed{\textbf{ウエ}}$ である。

(順天堂大)

(2) a, b を整数とし，関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ の最小値を M とおく。$\dfrac{1}{M}$ が整数のとき，$\dfrac{1}{M}$ のとり得る値は全部で $\boxed{\textbf{オ}}$ 通りあり，そのとき，$\dfrac{1}{M}$ の最大値は $\boxed{\textbf{カ}}$, 最小値は $\boxed{\textbf{キク}}$ である。

(上智大)

(3) 不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \geqq tx(y-z)$ がすべての実数 x, y, z に対して成立するような実数 t の範囲は $\boxed{\textbf{ケコサ}} \leqq t \leqq \boxed{\textbf{シスセ}}$ である。

(芝浦工大)

(4) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの頂点を $(3,\ -8)$ とするとき

$$b = \boxed{\textbf{ソタ}}a,\ c = \boxed{\textbf{チ}}a - \boxed{\textbf{ツ}}$$

となる。さらに，このグラフが $x = m$ および $x = m + 4$ で x 軸と交わるとすると $m = \boxed{\textbf{テ}}$ である。このとき，$a = \boxed{\textbf{ト}}$ となる。

(青山学院大)

[12] 放物線 $C : y = x^2 - 4x + 3$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 頂点の座標を求めなさい。

(2) x 軸，y 軸と交わる点の座標を求めなさい。

(3) 点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

(4) C を x 軸方向に 1, y 軸方向に 1 平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

(城西大)

[13] a を定数とするとき，x についての次の不等式を解け。

$$(a-2)x^2+(4-a)x-2 \geqq 0$$

(愛知教育大)

[14] 2 つの 2 次関数 $y=-x^2+5x$, $y=-2x^2-ax+a^2$（a は 0 でない定数）のグラフは，交点を 2 個持つことを示せ。また，2 つの交点の y 座標が両方とも負となる a の範囲を求めよ。

(岩手大)

[15] $f(x)=x+a$, $g(x)=x^2-x+2$ とする。次の条件が成り立つ a の範囲をそれぞれ求め，その理由を述べよ。

(1) $f(x)<g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ。

(2) $f(x)<g(x)$ が，全ての実数 x に対して成り立つ。

(3) $f(x)>g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ。

(4) $f(x)>g(x)$ が，全ての実数 x に対して成り立つ。

(北見工大)

[16] 関数 $f(x)=2x^2-12x+13$ がある。不等式 $|f(x)| \leqq 3$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。また，曲線 $y=|f(x)|$ と直線 $y=x+k$ が共有点を 3 個以上もつような定数 k の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(南山大)

[17] a を実数の定数とし，x に関する 2 次関数 $f(x)=x^2-2(2a+1)x+a^2+5a+5$ を考える。座標平面において，放物線 $y=f(x)$ の頂点 Z の座標を $(p,\ q)$ とする。このとき，p と q を a を用いて表すと，$p=\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}$, $q=-\boxed{\text{ウ}}a^2+\boxed{\text{エ}}a+\boxed{\text{オ}}$ となる。

また，点 Z が第 1 象限にあるのは，$-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}<a<\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

さらに，点 Z が第 1 象限にあり，点 Z の y 座標 q が最大になるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときであり，そのときの点 Z の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}}\right)$ である。

(東京理科大)

[18] $a,\ b,\ m$ を定数とする x の 2 次方程式

$$x^2-2(m-2)^2x+(am^2+bm+16)=0$$

を考える。

(1) 2 次方程式の解の 1 つが，m のどのような値に対しても一定であるように $a,\ b$ を定めよ。

(2) $a,\ b$ が (1) で定めた値をとるとき，2 次方程式の他の解が最小となるような m の値を求めよ。

(滋賀県立大)

[19] $1 \leqq x \leqq 3$ において，2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 3a$ が常に正となるような a の値の範囲を求めよ。

(島根大)

[20] a, b, c, d を正の実数とするとき，2 次方程式 $x^2 - (a+b)x + ab - cd = 0$ について，次の各問に答えよ。

(1) 異なる 2 実数解をもつことを示せ。

(2) 2 つの解のうち少なくとも 1 つは必ず正の数であることを示せ。

(3) 2 つの解を α, β とし $0 < \alpha < \beta$ とするとき，$a, a+b, \alpha, \beta$ の大小関係を示せ。

(信州大)

[21] H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

(1) H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2) H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(一橋大)

[22] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の 8 つの数字から異なる 4 つの数字を用いてできる 4 けたの整数を小さい順に並べた。

(1) 全部でいくつあるか。

(2) 5673 は何番目の整数か。

(3) 111 番目の整数は何か。

(産業医大)

[23] 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の係数および定数項 a, b, c に対して，$-1, 0, 2, 4, 6$ の 5 つの数字のいずれかを用いることとする。ただし，a, b, c は，すべて異なる値とする。このようにして作られた，すべての相異なる 2 次方程式のうち実数の解を持つものの個数を k とした時，$\dfrac{k}{4}$ の値を求めよ。

(自治医大)

[24] A さんの袋には 1 点と書いたカードが 2 枚，2 点と書いたカードが 2 枚，4 点と書いたカードが 1 枚入っている。B さんの袋には，1 点，2 点，3 点と書いたカードがそれぞれ 1 枚ずつ入っている。A さん，B さんがそれぞれ自分の袋から，毎回，よくかきまぜてからカードを 1 枚取り出して，その点数を記録して元に戻す。A さんの 1 回当たりの平均点数は $\boxed{\text{ア}}$ 点である。1 回目で A さんの点数が B さんの点数を上回る確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。3 回行って合計点数を求めるとき，A さんの合計点数が B さんの合計点数の 2 倍になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(独協医大)

[25] 3 つのサイコロを同時に 1 回投げ，出る目の数の和を k ($k = 3, 4, \cdots, 18$), $k = m$ となる確率を $P(m)$ とすると，$P(4) = P(17) =$ $\boxed{\text{ア}}$, $P(5) = P(16) =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。次に m の値による得点を下のように定める。

$k < m$ ならば得点 $-2m$,　$k \geqq m$ ならば得点 m

この得点の期待値を $T(m)$ とすると，$T(5) =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。また，$T(m)$ を最大とする m は，$m =$ $\boxed{\text{エ}}$ であり，$T(m)$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(芝浦工大)

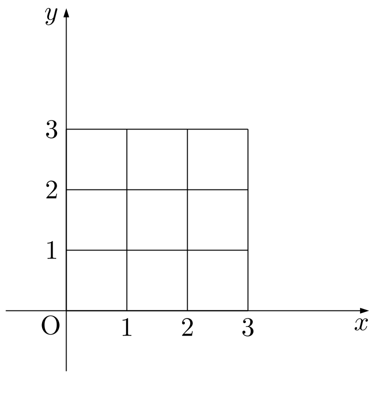
[26] 下図のような xy 平面上の経路を通って，原点から点 (3, 3) まで，最短の道すじで移動する。ただし，進める方向が 2 つある場合，確率 $\frac{2}{3}$ で x 軸方向へ進み，確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸方向へ進むものとする。

(1) 原点から点 (3, 3) までの最短の道すじは全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。

(2) 点 (3, 0), (2, 1), (3, 1) を通る確率はそれぞれ $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$, $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) 通る確率が最も低い点は $\left(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}\right)$ であり，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(4) 原点と点 (3, 3) 以外で通る確率が最も高い点は $\left(\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}\right)$ であり，その確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。



(上智大)

[27] 次の操作を繰り返して，点 P を数直線上で移動させる。

コインとサイコロを同時に投げ，

コインが表ならば，サイコロの目の数だけ P を右に進ませ，
コインが裏ならば，サイコロの目の数だけ P を左に進ませる。

このとき

(1) 2 回の操作で点 P が出発点に戻る確率を求めよ。

(2) 3 回目の操作が終わったとき，点 P が出発点にある確率を求めよ。

(学習院大)

[28] A, B の 2 人が，次のゲームをしようとしている。2 個のさいころを同時に投げたとき，出た目の数の和が奇数なら，A の得点はその奇数の値，B の得点は 0 とし，出た目の数の和が偶数なら，A の得点は 0, B の得点はその偶数の値とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このゲームでは，A, B の内どちらが高い得点をとるといえるか。

(2) このゲームを何回か行い，得点の合計が初めて 10 点以上になった者を勝ちとし，それ以後はゲームを行わないとする。1 回目のゲームで勝つ確率は A と B ではどちらが大きいか。2 回目のゲームで勝つ確率は A と B ではどちらが大きいか。

(岐阜薬科大)

[29] 2 つの箱があり，左の箱には 10 個の白玉，右の箱には 20 個の白玉が入っている。さらに 40 個の赤玉のうち n 個を左の箱に入れ，残りを右の箱に入れてよく混ぜておく。

(1) 左右それぞれの箱から 1 つずつ玉を取り出すとき，同じ色である確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(n) = \dfrac{1}{2}$ となる n を求めよ。

(3) $p(n)$ が最小になるのは，$n = 40$ のときであることを示せ。

(信州大)

[30] 次の問いに答えよ.

(1) $\triangle$ABC において，AB $= 5$, AC $= 7$, $\cos A = \dfrac{29}{35}$ のとき，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ア}}$, 内接円の半径 r は $r = \boxed{\text{イ}}$ である。

(埼玉工業大)

(2) $\triangle$ABC において，AB $= 3$, BC $= 7$, $\angle$A $= 60^\circ$ ならば，AC $= \boxed{\text{ウ}}$, $\cos$B $= \boxed{\text{エ}}$ であり，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{オ}}$, 内接円の半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(神戸薬科大)

(3) 半径 2 の円に内接する $\triangle$ABC において，$\angle$A $= 60^\circ$, AB $= 3$ とする。このとき，BC $=$ $\boxed{\text{キ}}$, AC $= \boxed{\text{ク}}$ である。

(愛知工業大)

[31] 平面上に 2 点 O, P があり，OP $= \sqrt{6}$ である。点 O を中心とする円 O と点 P を中心とする円 P が，2 点 A, B で交わっている。円 P の半径は 2 であり，$\angle$AOP $= 45^\circ$ である。このとき，円 O の半径は

$$\sqrt{\boxed{\text{ア}}} + \boxed{\text{イ}} \quad \text{または} \quad \sqrt{\boxed{\text{ア}}} - \boxed{\text{イ}}$$

である。

以下，円 O の半径が $\sqrt{\boxed{\text{ア}}} - \boxed{\text{イ}}$ のときを考える。

$$\text{AB} = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}} - \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。よって，四角形 AOBP の面積は

$$\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

$$\cos\angle\text{APB} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるから，$\angle$APB $= \boxed{\text{ケコ}}^\circ$ である。扇形 PAB, 扇形 OAB の面積を計算することにより，円 O の内部と円 P の内部の共通部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{サ}} - 3\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{6}\pi - \left(\boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}\right)$$

であることがわかる。

(センター試験)

[32] n を自然数とする。3 辺の長さが，それぞれ $3n+1,\ 2n+7,\ n+9$ である三角形が鋭角三角形になる自然数 n は全部でいくつあるか。

(津田塾大)

[33] 1 辺の長さが 1 の正四面体の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ で，体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。この正四面体に内接する球の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，外接する球の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(上智大)

[34] 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし，AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき，r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle\mathrm{DME}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。

(千葉大)

[35] 円に内接する四角形 ABCD に対して，$\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{BC}=b$, $\mathrm{CD}=c$, $\mathrm{DA}=d$ とおく。四角形 ABCD の面積を S とし，$\angle\mathrm{DAB}=A$ とする。

(1) $\cos A$ を a, b, c, d を用いて表せ。

(2) $2s=a+b+c+d$ とおくとき，$S^2=(s-a)(s-b)(a-c)(s-d)$ となることを示せ。

(3) $b=c=6$, $d=1$ とし，S を a の関数として $S(a)$ と表す。$S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。

(4) a, b, c, d が (3) の値をとるとき，四角形 ABCD の外接円の半径を求めよ。

(滋賀県立医大)

[36] 1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，辺 BC を 1 : 2 の比に内分する点を E, 辺 CD の中点を M とする。

次の問に答えよ。

(1) 線分 AM, AE, EM の長さを求めよ。

(2) $\angle\mathrm{EAM}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 三角形 AEM の面積を求めよ。

(大阪教育大)