数学　IIB 微分

例題 1

[1] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0}(-x^2 + 2x + 4)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a}\frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$

[2] 次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2}\frac{x^2 + ax + b + 2}{x - 2} = 5$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = 1$

[1] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{x}{x^2 - 2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{x - 3}{x^2 - x + 1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to a}\frac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x - a}$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

[2] 次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{x^2 + 2ax - b}{x - 1} = -10$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1 + x + x^2} - (1 + ax)}{x} = 4$

例題 2

定義に従って，次の関数の () における微分係数を求めよ．

(1) $f(x) = x^2 + 2x \ (x = 2)$

(2) $f(x) = x^n \ (x = a)$

[3] 定義に従って，次の関数の () における微分係数を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 \ (x = 2)$

(2) $f(x) = \sqrt{x - 1} \ (x = a)$

例題 3

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$　　(2) $y = ax^2 + bx + c$

(3) $y = (5x + 1)^6$　　(4) $y = (2x + 3)(4x - 1)^2$

[4] 次の関数を x について微分せよ.

(1) $y = 2x^5 + 2x$　　(2) $y = -x^3 + 5x - 4$

(3) $z = x^3y - 3x^2y^2 + 6xy^3 - y^3$　　(4) $y = -x + k$

(5) $y = (x + 1)(x - 2)$　　(6) $y = (x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 3)$

(7) $y = (2x - 1)^3$　　(8) $y = (3x^2 - 2)^5$

(9) $y = x(x - 1)(x - 2)$　　(10) $y = (2x + 5)^2(3x - 4)^2$

例題 4

次の関数の増減を調べ，グラフを描け．また，その極値を求めよ．

(1) $y = x^3 - 12x + 1$

(2) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x$

[5] 次の関数の増減を調べ，グラフを描け．また，その極値を求めよ．

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

(2) $y = -x^3$

(3) $y = x^3 - 3x^2$

(4) $y = -x^3 + x^2 + x + 2$

[6] 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(2) $f(x) = 2x^3 - 3ax^2$

例題5

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大値 4 をとり，$x=3$ で極小値をとる．このとき，定数 a, b, c を求めよ．また極小値を求めよ．

[7] 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2-ax-2$ が，$x=-1$ で極値をもつとき定数 a を求めよ．また，そのときの極値を求めよ．

(2) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=4$ で極小値 -18 をとり，$x=\dfrac{2}{3}$ で極大値をとる．このとき，定数 a, b, c を求めよ．また極大値を求めよ．

[8] 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=x^3-ax^2+ax-1$ が極値をもつような定数 a の範囲を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=2x^3-(a+2)x^2+a^2x-1$ が実数全体で常に単調増加であるような定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2ax^2+(b-1)x-1$ が極値をもたないとき，a と b の関係を求め，ab 平面に図示せよ．

例題 6

[1] 次の曲線上の点 P における接線と法線を求めよ.

(1) $y = x^2 - 3x + 1 \quad P(0, 1)$

(2) $y = x^3 - 2x + 3 \quad P(1, 2)$

[2] 点 P を通る次の曲線の接線の方程式を求めよ.

(1) $y = x^2 \quad P(3, 8)$

(2) $y = x^3 - 12x + 9 \quad P(2, -15)$

[9] 次の曲線上の点 P における接線と法線を求めよ.

(1) $y = x^2 \quad P(1, 1)$

(2) $y = x^2 - 2x + 3 \quad P(1, 2)$

(3) $y = x^3 - 2x^2 \quad P(0, 0)$

(4) $y = -2x^3 - 4x^2 + x - 2 \quad P(-2, -4)$

[10] 点 P を通る次の曲線の接線の方程式を求めよ.

(1) $y = x^3 - 3x + 6 \quad P(0, 8)$

(2) $y = x^3 - 3x - 7 \quad P(-2, -1)$

[11] 2 曲線 $y = x^2$ と $y = -x^2 - 18$ に同時に接する直線の方程式を求めよ.

例題 7

[1] 次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1) $y=x^3-3x+1\quad(-2 \leqq x \leqq 0)$

(2) $y=-x^3+6x+4\quad(-2 \leqq x \leqq 1)$

[2] $a>0$ のとき，関数 $f(x)=2x^3-3ax^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．

[12] 次の関数の最大値と最小値を求めよ．

(1) $y=(x-1)(x-4)^2\quad(-1 \leqq x \leqq 3)$

(2) $y=x^3-3x\quad(-2 \leqq x \leqq 1)$

[13] $a>0$ とするとき，関数 $y=ax^3-3ax+b$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 19 で最小値が-1 であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ．

[14] $y=x^3-x^2+1$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

例題 8

[1] 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1) $x^3 - 3x + 1 = 0$

(2) $x^3 + 6x^2 + a = 0$

[2] $x \geqq 0$ のとき，$x^3 - 9x^2 + 24x \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

[15] 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1) $x^3 + 3x^2 + 6x - 2 = 0$

(2) $x^3 - 12x + 2a = 0$

[16] $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$2x^3 - 6x^2 + x + 2 > x - 8$ が成り立つことを証明せよ．