

## 数学 IIB 指数関数, 対数関数

### 例題 1

次の式を簡単にし,  $a^r$  の形で表せ.

(1)  $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{6}}$

(2)  $a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{5}{6}}$

(3)  $\sqrt{\frac{xz^3}{y^2}} \div \sqrt[4]{\frac{x^2y}{z^3}}$

(4)  $\sqrt[4]{\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt[3]{a}}$

[1] 次の式を簡単にし,  $a^r$  の形で表せ.

(1)  $(a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}})^{15}$

(2)  $\left\{ \left( \frac{125}{64} \right)^{\frac{1}{4}} \right\}^{-\frac{2}{3}}$

(3)  $a \times (a^{-2} b^{-3})^{-2} \div (ab^{-1})^3$

(4)  $\left\{ \left( \frac{16}{125} \right)^{-\frac{3}{4}} \right\}^{-\frac{9}{2}}$

[2]  $3^{2x} = 5$  のとき,  $\frac{3^{3x} + 3^{-3x}}{3^x + 3^{-x}}$  の値を求めよ.

例題 2

次の関数のグラフをかけ .

(1)  $y = 2^x$

(2)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3)  $y = 2^{x-1}$

(4)  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

[3] 次の方程式 , 不等式を解け .

(1)  $5^x = 625$

(2)  $4^x = 8$

(3)  $(\sqrt{2})^x = 32 \cdot 2^{-2x}$

(4)  $2^x \geq 256$

(5)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{9}{4}$

(6)  $2^{2x-3} \cdot 2^x + 2 > 0$

例題 3

次の値を求めよ .

(1)  $\log_2 8$

(3)  $\log_3 \frac{1}{81}$

(2)  $\log_2 \sqrt[3]{2}$

(4)  $\log_{10} \frac{1}{1000}$

[4] 次の値を求めよ .

(1)  $\log_3 \sqrt[5]{9}$

(3)  $\log_x 243 = 5$  をみたす  $x$

(2)  $\log_{10} 100\sqrt{10}$

(4)  $\log_x \sqrt[4]{3} = \frac{1}{2}$  をみたす  $x$

例題 4

次の式を簡単にせよ .

$$(1) \left(\log_2 \frac{9}{4}\right)^2 - (\log_2 9)^2 + 2 \log_2 81$$

$$(2) (\log_4 3) \cdot (\log_9 25) \cdot (\log_5 8)$$

[5] 次の式を簡単にせよ .

$$(1) (\log_{10} 2)^3 + (\log_{10} 5)^3 + (\log_{10} 5) \cdot (\log_{10} 8)$$

$$(2) \frac{1}{2} \log_2 10 + \log_4 14 - 3 \log_8 \sqrt{35}$$

$$(3) (\log_2 6) \cdot (\log_3 6) - (\log_2 3 + \log_3 2)$$

$$(4) (\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$$

例題 5

次の方程式，不等式を解け．

$$(1) \log_{10} x + \log_{10}(x - 1) = \log_{10} 2 + 1$$

$$(2) (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 + 2 = 0$$

$$(3) \log_a(2x - 1) \geq \log_a(x + 1) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) (\log_{10} 4x)(\log_{10} 8x) \leq 12(\log_{10} 2)^2$$

[6] 次の方程式，不等式を解け．

$$(1) \log_4(4 + x - x^2) = \frac{1}{2} + \log_2(1 - x)$$

$$(2) (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 \geq 0$$

$$(3) (\log_3 x)(\log_3 \frac{x}{9}) = 8$$

$$(4) 3 \cdot 2^{2x-2} + 2^{x-1} - 2^{-2} \leq 0$$

例題 6

次の問いに答えよ .

- (1)  $0 \leq x \leq 2$  のとき ,  $y = 2^{1-2x} - 2^{1-x} + 1$  の 最大値と最小値 , および , そのときの  $x$  の値を求めよ .
- (2)  $y = (\log_2 x)^2 + \log_4 \frac{x^8}{4}$  の最小値と , そのときの  $x$  の値を求めよ .

[7]  $f(x) = 2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} - 3\sqrt{2}(2^x + \frac{1}{2^x}) + 4$  について , 次の問いに答えよ .

(1)  $2^x + \frac{1}{2^x} = t$  とおいて ,  $f(x)$  を  $t$  で表せ ..

(2)  $f(x)$  の最小値と , そのときの  $x$  の値を求めよ .

[8]  $\log_3 x + \log_3 y = 5$  のとき ,  $2x + 3y$  の最小値を求めよ .

例題 7

$\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  として, 次の問いに答えよ.

- (1)  $15^{15}$  は何桁の整数か?
- (2)  $(\frac{5}{9})^{100}$  は, 小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか?
- (3)  $m, n$  は正の整数で  $100m > 106n$  をみたしているとする. このとき,  $8^m > 9^n$  が成り立つことを示せ.

[9]  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$ ,  $\log_{10} 7 = 0.84510$  として, 次の問いに答えよ.

- (1)  $60000 \leq x \leq 70000$  をみたす  $x$  に対し,  $\log_{10} x$  の範囲を求めよ.
- (2)  $3^{2011}$  は何桁の整数か.
- (3)  $3^{2011}$  の一番上の桁の数は何か.
- (4)  $3^{2011}$  の一番下の桁の数は何か.

[10] ある種のガラス板 1 枚を光が通過すると, その光の強度の  $\frac{1}{10}$  が失われる. このガラス板を何枚か重ねて, もとの光の強度の  $\frac{1}{5}$  以下にしたい. 最小の枚数を求めよ. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする.

入試問題演習

[1]  $\log_2(\sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$  が成り立つ。

(関東学院大)

[2]  $\log_5 25 + \log_5 75 - \log_5 3 + \frac{\log_5 27}{\log_5 9}$  を簡単にすると  $\boxed{\text{ア}}$  である。

(立教大)

[3] 不等式  $\log_2 a - 3\log_a 2 > 2$  を満たす  $a$  の値の範囲を求めよ。ただし,  $a \neq 1, a > 0$  とする。

(秋田大)

[4]  $1 \leq x \leq 5$  における  $y = 2\log_5 x + (\log_5 x)^2$  の最大値と最小値を求めよ。

(群馬大)

[5] 次の式をともにみたす  $x, y$  の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} \log_2 xy = \log_2 x \cdot \log_2 y \\ \log_2 \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(横浜国大)



[6]  $a$  を  $a > \frac{1}{2}$  をみたす定数とする.  $1 \leq x \leq 2a$  のとき,

$$y = \left(\log_2 \frac{x}{a}\right) \left(\log_2 \frac{x^2}{a^2}\right)$$

の最大値と最小値を求めよ.

(早稲田大)

[7] 数列  $\{a_n\}$  が次の条件

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとします。

(1)  $a_n$  を  $n$  を用いて表してください。

(2)  $a_n < 10^{60}$  となるような自然数  $n$  は全部で何個ありますか。

ただし, (2) では  $\log_{10} 2 = 0.3010$  として計算してください。

(慶応大)