

図形と方程式

例題 1

[1] 次の 2 点間の距離を求めよ.

(1) $A(1, 2), B(-5, 2)$

(2) $A(-3, -1), B(-3, 7)$

[2] 次の問いに答えよ.

(1) 2 点 $A(1, 1), B(-3, 2)$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点を求めよ.

(2) 2 点 $A(1, 1), B(-3, 2)$ を結ぶ線分を $2:1$ に外分する点を求めよ.

(3) 2 点 $A(-1, 5), B(-3, 2)$ を結ぶ線分の中点を求めよ.

[1] 次の 2 点間の距離を求めよ.

(1) $A(1, -2), B(5, 2)$

(2) $A(3, 1), B(-3, -7)$

[2] 次の問いに答えよ.

(1) 2 点 $A(6, -1), B(-3, -2)$ を結ぶ線分を $2:3$ に内分する点を求めよ.

(2) 2 点 $A(2, 1), B(3, 2)$ を結ぶ線分を $3:1$ に外分する点を求めよ.

(3) 2 点 $A(4, 5), B(-3, -2)$ を結ぶ線分の中点を求めよ.

[3] 3 点 $A(1, -1), B(3, 2), C(-1, 5)$ を頂点とする三角形 ABC の重心の座標を求めよ.

例題 2

次の条件をみたす直線の方程式を求めよ.

- (1) 点 $A(1, 3)$ を通り, 傾き -3 の直線.
- (2) 2点 $A(-2, 3)$, $B(3, -1)$ を通る直線
- (3) 2点 $A(-5, 1)$, $B(-5, \sqrt{3})$ を通る直線
- (4) 点 $A(-3, -7)$ を通り, 直線 $y = -2x + 11$ に平行な直線
- (5) 点 $A(-3, -7)$ を通り, 直線 $y = -2x + 11$ に垂直な直線

[4] 次の条件をみたす直線の方程式を求めよ.

- (1) 点 $A(-5, 2)$ を通り, 傾き $\frac{1}{2}$ の直線.
- (2) 2点 $A(2, -3)$, $B(-3, -1)$ を通る直線
- (3) 2点 $A(\sqrt{5}, 1)$, $B(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ を通る直線
- (4) 点 $A(-3, -7)$ を通り, 直線 $x = -1$ に平行な直線
- (5) 点 $A(5, 1)$ を通り, 直線 $y = \frac{1}{3}x + 1$ に垂直な直線

例題 3

次の条件をみたす円の方程式を求めよ.

- (1) 中心が $(1, -2)$, 半径 3 の円.
- (2) 2 点 $(1, -1)$, $(3, 3)$ を直径の両端とする円.
- (3) 3 点 $(1, 0)$, $(3, -2)$, $(-1, 5)$ を通る円.
- (4) 点 $(2, 3)$ を通り, x 軸と y 軸に接する円.

[5] 次の条件をみたす円の方程式を求めよ.

- (1) 中心が $(1, 1)$, 半径 2 の円.
- (2) 2 点 $(1, 0)$, $(-3, 3)$ を直径の両端とする円.
- (3) 3 点 $(2, 2)$, $(-3, -2)$, $(1, 5)$ を通る円.
- (4) 点 $(-2, 4)$ を通り, x 軸と y 軸に接する円.
- (5) 2 点 $(1, 1)$, $(-3, 5)$ を通り, x 軸に接する円.

例題 4

- (1) 点 $(0, 0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離を求めよ
- (2) 点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離を求めよ.

[6] 次の点と直線との距離を求めよ.

- (1) $(1, 1)$, $3x - y = 3$
- (2) $(-2, 4)$, $y = -x + 5$
- (3) $(0, 0)$, $y = x + 1$
- (4) $(-3, 2)$, $y = -1$

[7] 3点 $A(1, -1)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 5)$ を頂点とする三角形 ABC において,

- (1) 2点 A , B を通る直線の方程式を求めよ.
- (2) 点 C と直線 AB との距離を求めよ.
- (3) 三角形 ABC の面積を求めよ.

例題 5

- (1) 円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ.
- (2) 円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ.
- (3) 点 $A(2, -5)$ を通り, 円 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ に接する直線の方程式を求めよ.

[8] 次の円の与えられた点における接線の方程式を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 = 4$, $(-1, \sqrt{3})$

(2) $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$, $(0, 0)$

[9] 円 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ の接線で点 $(1, 7)$ を通るものの方程式を求めよ.

例題 6

[1] 次の円と直線の関係（2点で交わる，接する，共有点をもたない）を判別せよ.

(1) $x^2 + y^2 = 5$, $y = -x + \sqrt{10}$

(2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $x - y = 1$

(3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$, $y = 3x + 10$

[2] 円 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ と直線 $y = -x + 1$ の2交点間の距離を求めよ.

[10] 次の円と直線の関係（2点で交わる，接する，共有点をもたない）を判別せよ.

(1) $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x + 5$

(2) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$, $y = 2x + 1$

(3) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$, $y = x - 1$

[11] 円 $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ と直線 $y = 2x - 6$ の2交点間の距離を求めよ.

例題 7

[1] 次の2つの円の関係（2点で交わる，接する，共有点をもたない）を判別せよ．

(1) $x^2 + y^2 = 2$, $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

(2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

(3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$

[2] 2円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ と $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ の2つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ．

[12] 次の2つの円の関係（2点で交わる，接する，共有点をもたない）を判別せよ．

(1) $x^2 + y^2 = 1$, $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

(2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $x^2 + (y + 1)^2 = 2$

(3) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 3$, $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$

[13] 2円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ と $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

例題 8

[1] 次の不等式で表される領域を図示せよ.

(1) $y > x + 1$ かつ $y < -x + 1$

(2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4$

(3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$ または, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 9$

[2] 点 $P(x, y)$ が $y - 2x + 4 \geq 0$, $y + 3x - 5 \geq 0$, $2y + x - 12 \leq 0$ をみたす領域内を動くとき,

(1) $x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) $x^2 + y$ の最大値と最小値を求めよ.

[14] 次の不等式で表される領域を図示せよ.

(1) $(x + y - 1)(2x + y) \leq 0$

(2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$

(3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 4$ かつ $y \leq -x + 1$

[15] 点 $P(x, y)$ が $x - 2 \leq y \leq -x^2$ をみたす領域内を動くとき, $x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

例題 9

[1] 次の条件をみたす点 P の軌跡の方程式を求めよ.

(1) $A(1, 1)$ と $B(-1, -1)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P

(2) 2 直線 $y = -x + 2$ と $y = 2x - 1$ から等距離にある点 P .

[2] 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき, 点 Q と点 $A(7, 0)$ を結ぶ線分を $3:1$ に内分する点 P の軌跡の方程式を求めよ.

[16] 次の条件をみたす点 P の軌跡の方程式を求めよ.

(1) $A(1, 1)$ と $B(-1, -1)$ から等距離にある点 P .

(2) 点 $A(0, 1)$ と直線 $y = -1$ からの距離が等しい点 P .

[17] 点 $P(p, q)$ が直線 $y = 2x$ 上を動くとき, 点 $Q(p + q, pq)$ の軌跡の方程式を求めよ.

入試問題演習

[1] 次の2直線の交点と点 $(2, 0)$ を通る直線の方程式を求めなさい。

$$3x - 2y - 4 = 0, \quad 4x + 3y - 10 = 0$$

[2] a は実数で, $a > 0$ とする。座標平面において, 円 $C : (x - a)^2 + y^2 = 9^2$ に直線 $l : y = \frac{4}{3}x$ が接している。

(1) a の値を求めなさい。

(2) 円 C_1 は, C と異なる円で, その中心が x 軸上にあり, l と C の両方に接しているとする。 C_1 の中心の座標と半径を求めなさい。

[3] a, b を実数とする。3次関数 $y = x^3 - 3ax^2 - 3bx$ が $x = p$ と $x = q$ とで極値をとるものとする。

(1) $-1 \leq p \leq 0$ かつ $1 \leq q \leq 2$ となるような点 (a, b) の動く範囲を平面上に図示せよ。

(2) (a, b) が上の範囲を動くとき, $a + b$ の最大値と最小値を求めよ。

[4] xy 平面上の原点を O とし, 放物線 $y = k - x^2$ を C とする。ただし, k は $\frac{1}{2}$ より大きい定数とする。 C の点 $P(t, k - t^2)$ が $t \geq 0$ の範囲で動くとき OP の長さが最小となる P を P_0 とおく。

(1) P_0 の座標を求めよ。

(2) O と P_0 を通る直線と, P_0 における C の接線が直交することを示せ。

(3) O と P_0 を通る直線の傾きが1のとき, k の値を求めよ。

(4) O と P_0 を通る直線の傾きが1のとき, xy 平面の第1象限にあつて, x 軸, y 軸および放物線 C に接する円のうち小さい方の半径を求めよ。

[5] 不等式 $|x + 2y| + |2x - y| \leq 1$ の表す領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 領域 D における $x - y$ の最大値および最小値を求めよ。
- (3) 領域 D における $|x| - |y|$ の最大値および最小値を求めよ。

[6] 座標平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし、点 $P(p, q)$ は $p^2 + q^2 > 1$ をみたすものとする。 P から C へ接線をひき、その接点を $T(s, t)$ とする。 P を中心とし T を通る円を D として、 D は点 $A(a, 0)$ を通るものとする。 次の問いに答えよ。

- (1) $(a - p)^2 = p^2 - 1$ であることを示せ。
- (2) $0 < a < 1$ のとき $p > 1$ であることを示し、 a を p を用いて表せ。

[7] 座標平面において、点 $P(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし、直線 $y = a(x + 1)$ と C との交点を Q, R とする。

- (1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最大となる a を求めよ。

[8] a, b を実数とし、 xy 平面上の 3 直線を

$$l : x + y = 0, \quad l_1 : ax + y = 2a + 2, \quad l_2 : bx + y = 2b + 2$$

で定める。

- (1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。 P の座標を求めよ。
- (2) l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。
- (3) a, b は (2) で求めた条件を満たすものとする。点 $(1, 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め、それを ab 平面上に図示せよ。