数学　IIB 積分

例題 1

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 dx$

(3) $\displaystyle\int (x-2)(x+3)dx$

(4) $\displaystyle\int (x-2)^5 dx$

[1] 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x dx$

(2) $\displaystyle\int (-x^5)dx$

(3) $\displaystyle\int (-x+3)dx$

(4) $\displaystyle\int -2x^2+3x+1)dx$

(5) $\displaystyle\int (-y^2+6y-5)dy$

(6) $\displaystyle\int (3x+4)(2x-5)dx$

例題 2

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1)(x+2)dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x-2)^4 dx$

[2] 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (-y^2+2y)dy$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (2t+1)(t-5)dt$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^3+2x)dx$

(4) $\displaystyle\int_{2}^{1} (x^3-2x^2+3)dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)^6 dx$

(6) $\displaystyle\int_{-a}^{a} (x^2-2)dx$

例題 3

[1] 定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ を求めよ.

[2] 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{2}|x(x-1)|dx$ を求めよ.

[3] 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}|x|dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{4}|x-2|dx$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}|x(x-2)|dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx$

[4] 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx$

例題 4

[1] 関数 $f(x) = \int_0^x (t^2 - 2t + 2)dt$ の極値を求めよ．

[2] $a > 0$ のとき，$f(a) = \int_0^1 x|x - a|dx$ の最小値を求めよ．

[5] 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x) = \int_0^x (3t^2 + 2xt - 4)dt$

(2) $f(x) = \int_0^x (t^2 - 4(x-1)t + 1)dt$

[6] 次の問いに答えよ．

(1) $a > 0$ のとき，$f(a) = \int_0^2 |x^2 - a^2|dx$ の最小値を求めよ．

(2) $x \leqq 0$ のとき，$f(x) = \int_x^{x+1} |t(t-3)|dt$ の最小値を求めよ．

例題 5

[1] 曲線 $y = x^3 - x^2 + 2$ と $x = 1$, x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

[2] 2曲線 $y = x^2 + x - 2$, $y = -x^2 - 2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

[7] 次の曲線, または直線で囲まれた図形の面積を求めよ.

(1) $y = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 1$ と x 軸

(2) $y = x^3 - x + 2$, $x = 0$, $x = 3$ と x 軸

(3) $y = x^2 - 4$, $y = x + 1$

(4) $y = x^2 - x - 2$, $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$

[8] 次の2曲線で囲まれた図形の面積を求めよ.

(1) $y = x^2 - 4x + 6$, $y = -x^2 - 2x + 8$

(2) $y = 2x^2 - x + 5$, $y = -x^2 + x + 7$

(3) $y = x^2$, $y = |x|$

(4) $y = |x^2 - 4|$, $y = x + 2$

例題 6

放物線 $y=x^2$ と点 $(2,6)$ を通る直線とで囲まれる部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ．

[9] 次の問いに答えよ．

(1) 点 $(0,2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積が $4\sqrt{3}$ であるとき，この直線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 $y=-x^2+x$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を，原点を通る直線が２等分するとき，この直線の方程式を求めよ．

[10] ２つの放物線 $y=x^2$, $y=x^2-4x$ と，この２つの放物線の共通接線で囲まれた図形の面積を求めよ．

入試問題演習

[1] 2 次曲線 $C : y = x^2 - 4x$ について，点 $(3, -3)$ における接線を L とする。曲線 C, 直線 L および y 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

(自治医大)

[2] 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) $y = f(x)$ において，傾きが最小となる接線の方程式を求めよ。

(神奈川大)

[3] 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が x 軸と 3 点で交わり，その交点の x 座標 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ が次の 3 条件をみたしているとする。

$$\alpha + \beta + \gamma = 6 \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 18 \quad \alpha\beta\gamma = 1$$

このとき，

(1) $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $\alpha \leqq x \leqq \gamma$ の範囲を x が動く場合，y が最大になるのは $x = \boxed{\text{エ}}$ のときで最大値は $\boxed{\text{オ}}$, y が最小になるのは $x = \boxed{\text{カ}}$ のときで最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(東海大)

[4] 関数 $f(x) = ax^3 + (7 - a^2)x^2 + bx + c$ は，$x = -1$ で極小値を，$x = 2$ で極大値をとり，極小値の絶対値の 2 倍が極大値に等しい。定数 a, b, c を求めよ。

(愛媛大)

[5] 関数 $f(x)=x^3-2x^2+x$ について以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け

(2) 直線 $y=kx$ と $y=f(x)$ の共有点の個数を k の値に応じて求めよ。

(お茶の水大)

[6] 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$, $C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{9}{2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1, C_2 の両方の接線となる直線は 2 本ある。この 2 本の直線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた 2 本の直線と放物線 C_1 によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(甲南大)

[7] 放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$, $(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とするとき，次の問に答えよ。

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) C, l_1, l_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

(群馬大)

[8] x についての 2 次関数 $y = -x^2 + 2tx + 2t^2 - 2t$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(t)$, 最小値を $m(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ のとき $M(t)$ と $m(t)$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (M(t) - m(t))dt$ を求めよ。

(福岡大)

[9] $0 < a < 2$ とする。曲線 $y = x^2$ と直線 $y = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$, 曲線 $y = x^2$ $(x \geqq a)$ と 2 直線 $y = a^2$, $x = 2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $T(a)$ を求めよ。

(3) $S(a) + T(a)$ の最小値を求めよ。

(大同工大)

[10] 放物線 $C : y = 25 - 36x^2$, $0 \leqq x$, がある。

C と x 軸と直線 $x = a$ で囲まれる図形の面積を S_1, C と x 軸と直線 $x = a+1$ で囲まれる図形の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和を S とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ とする。

(1) S を a の式で表せ。

(2) S の最大値と最小値を求めよ。また，その場合の a の値を示せ。

(早稲田大)

[11] 座標平面上の曲線 $C : y = |x^2 - 1|$ と傾き a の直線 $l : y = a(x+1)$ が異なる 3 点で交わっているとする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と l で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S を a を用いて表せ。

(3) S が最小になる a の値を求めよ。

(金沢大)

[12] $a \geqq 0$ とし，関数 $f(x) = 3|x^2 - 1|$ について，$S(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx$ とする。

(1) $S(0)$ を求めなさい。

(2) $S(a)$ を求めなさい。

(3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めなさい。

(大分大)

[13] 放物線 $y = x^2$ について，次の問に答えよ。

(1) x の値が p から q まで変化するときの平均変化率と点 $\left(r,\, r^2\right)$ における接線の傾きが等しいとき，r を p と q で表せ。ただし，$0 < p < q$ とする。

(2) (1) の条件のもとで，放物線 $y = x^2$, x 軸，直線 $x = p$ および直線 $x = r$ により囲まれた部分の面積を S_1 とし，また放物線 $y = x^2$, x 軸，直線 $x = q$ および直線 $x = r$ により囲まれた部分の面積を S_2 とする。$S_1 : S_2 = 1 : 3$ であるとき，q を p で表せ。

(防衛大)