数学 IIB　数列

例題 1

(1) 初項が 2，公差 5 の等差数列の第 15 項はいくらか．第 n 項はいくらか．また，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項は 67, 第 20 項は 137 であるという．この数列の初項と公差を求め，第 100 項を求めよ．また，初項から第 100 項までの和を求めよ．

[1] 初項 a, 公差 d が次のように与えられている等差数列の第 n 項と，初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1) $a = 100,\ d = 5$

(2) $a = -2,\ d = -1$

(3) $a = 23,\ d = -3$

(4) $a = 1,\ d = 1$

[2] 公差が 4, 初項と第 45 項の和が 130 であるような等差数列の初項から第 50 項までの和を求めよ．

[3] 100 と 200 の間にある 3 の倍数の和を求めよ．また，3 の倍数であるが 5 の倍数でない整数の和を求めよ．

[4] $a_{19} = 230,\ a_{25} = 220$ をみたす等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が最大になるときの n の値を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

例題 2

初項 3，公比 2 の等比数列の第 10 項はいくらか，第 n 項はいくらか．また，初項から第 n 項までの和を求めよ．

[5] 初項 a, 公比 r が次のような等比数列の第 n 項と初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1) $a=2,\ r=-3$

(2) $a=\dfrac{1}{4},\ r=-1$

(3) $a=-3,\ r=-\dfrac{1}{2}$

(4) $a=-4,\ r=1$

[6] 第 5 項が $\dfrac{3}{16}$, 第 8 項が $\dfrac{3}{128}$ であるような等比数列の第 n 項を求めよ．

[7] ある等比数列の初項から第 n 項までの和は 24 で，第 $2n$ 項までの和は 30 であるという．この数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ．

[8] 積が 125 であるような異なる実数 $a,\ b,\ c$ がある．これら 3 つの数は $a,\ b,\ c$ の順で等差数列をなし，$b,\ c,\ a$ の順で等比数列をなす．このとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

例題 3

[1] 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(1) $1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ \cdots$

(2) $1\cdot 4,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 6,\ \cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^k$

[2] 次の数列の第 n 項を求めよ.

$2,\ 7,\ 16,\ 29,\ 46,\ 67,\ \cdots$

[9] 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(1) $1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ \cdots$

(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots$

(3) $1\cdot 2\cdot 3,\ 3\cdot 4\cdot 5,\ 5\cdot 6\cdot 7,\ \cdots$

[10] 次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2^k)^2$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)3^{k-1}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

[11] 次の数列の第 n 項を求めよ.

(1) $4,\ 12,\ 26,\ 46,\ 72,\ \cdots$

(2) $1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 27,\ \cdots$

例題 4

[1] $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\cdots$ と並べた数列について，次の問いに答えよ．

(1) $\frac{18}{25}$ は初めから数えて第何項目にあるか．

(2) 初めから数えて第 666 項目にある数を求めよ．

(3) 初項から第 666 項までの和を求めよ．

[2] 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n = 2^n - n$ で表されるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

[12] $1|3,\ 5|7,\ 9,\ 11|13,\ 15,\ 17,\ 19|21,\ \cdots$ のように奇数の列を分けたとき，次の問いに答えよ．

(1) 第 13 番目の組の第 5 項はいくらか．

(2) 第 m 番目の組の第 n 項はいくらか．ただし，$m \geqq m$ とする．

(3) 2005 は第何番目の組の第何項か．

[13] 自然数からなる数列を次のように定義する。

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1,\ \cdots$$

次の各問に答えよ。

(1) 上の数列において 10 が初めてあらわれるのは第何項であるか。

(2) 第 100 項の数字を求めよ。

(3) 上の数列で 1 があらわれる項に注目する。n 回目にあらわれる 1 は第何項であるか，n の式で表せ。

[14] 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$$S_n = n^2 + 4n$$

が成り立っている．このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

例題 5

次の漸化式で定まる数列の第 n 項を求めよ．

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = -2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(4) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(5) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(6) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 3n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

[15] 次の漸化式で定まる数列の第 n 項を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(4) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -5a_n - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(6) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -3a_n - 2n + 5 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

[16] 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおいたとき，b_{n+1} を $b - n$ で表せ．

(2) b_n を n の式で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

[17] 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n$ をみたす α と β の値を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

例題 6

正の整数 n について,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことを証明せよ.

[18] 正の整数 n について，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

[19] $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n}{3 = a_n} \quad (n =, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列について，次の問いに答えよ.

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ.

(2) a_n を推定せよ.

(3) (2) の推定が正しいことを数学的帰納法で示せ.

入試問題演習

[1] 等差数列をなす 3 つの数があり，それらの和が 27 で，積が 704 である。この 3 つの数を求めよ。

(徳島文理大)

[2] 初項が a_1, 公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が b_1, 公比が r の等比数列 $\{b_n\}$ がある。ただし，$b_1 \fallingdotseq 0$, $r > 0$ とする。$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{c_n\}$ において，$c_1 = -8$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) r を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。また，数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(中京大)

[3] 初項 1, 公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項 2, 公差 2 の等差数列を $\{b_n\}$ とする。二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のすべての項を小さいものから順に並べた数列を $\{c_n\}$ とするとき，$c_{100} = \boxed{ア}$ である。また，$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{100} = \boxed{イ}$ である。

(愛知工業大)

[4] 1 から 710 までの自然数のうち，36 で割り切れるものは全部で $\boxed{アイ}$ 個ある。1 から 710 までの自然数のうち，12 で割り切れるが 18 で割り切れないものは全部で $\boxed{ウエ}$ 個あり，それらの和は $\boxed{オカキクケ}$ である。

(大同工業大)

[5] 数列 $\{a_n\}$ を初項が 1 で公差が $\dfrac{4}{3}$ の等差数列とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{ア}}$ である。よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{イ}}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = [a_n]$ と定める。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

$b_n = 103$ であるとき，$n = \boxed{\text{エ}}$ である。$b_n \leqq 50$ を満たす b_n すべての和は $\boxed{\text{オ}}$ である。

m が正の整数のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{3m} b_k = \boxed{\text{カ}}$ である。

(東海大)

[6] $\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \cdots$
について，この順に並べてできる数列

$$1, 2, 3, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots$$

に関し，次の問に答えよ。

(1) この数列に初めて 99 が現れるのは第 $\boxed{\text{アイウエ}}$ 項である。

(2) 数列の第 1999 項は，第 $\boxed{\text{オカ}}$ 群の中の第 $\boxed{\text{キク}}$ 番目であり，その数は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である。ただし，$\{1\}$ を第 1 群，$\{2, 3\}$ を第 2 群，$\{3, 4, 5\}$ を第 3 群，$\cdots$ とする。

(東京薬科大)

[7] 等差数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の初項から n 項までの和を S_n とする。S_n を大きい順に並べかえると第 3 項までがそれぞれ 22, 21, 20 となるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。

(群馬大)

[8] 初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $S_n = 94$ となる n と d がちょうど一組ある。その n と d を求めよ。

(2) $S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。

(神戸大)

[9] 自然数 n に対し，$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ とする。S_n を n を用いて表せ。

(和歌山県立医大)

[10] 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が，$S_1 = 0,\ S_{n+1} - 3S_n = n^2\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が満たす漸化式を a_n と a_{n+1} の関係式で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(徳島大)

[11] 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を $S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。

(1) 初項 a_1 を求めなさい。

(2) 一般項 a_n を求めなさい。

(3) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい。

(大分大)

[12] 成功の確率が $\dfrac{1}{2}$ のゲームを何回かくり返す。はじめに 9 枚以下のコインをもっていて，各ゲームごとに成功したらコインを 1 枚もらい，失敗したらコインを 1 枚わたす。もっているコインが 10 枚になるか，または，なくなったらゲームをやめる。x 枚のコインから始めて，コインが 10 枚になる前になくなる確率を $p(x)\ (0 < x < 10)$ で表し，$p(0) = 1,\ p(10) = 0$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $p(x)$ を $p(x+1)$ と $p(x-1)$ を用いて表せ。

(2) $p(1)$ を求めよ。

(大阪女子大)