数学 IIB　三角関数

例題 1

[1] それぞれ度数法の角は弧度法に，弧度法の角は度数法に直せ．

(1) $495°$　(2) $-1200°$

(3) $\frac{5}{12}\pi$　(4) $-\frac{5}{4}\pi$

[2] 次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\frac{11}{3}\pi$　(2) $\cos(-\frac{3}{4}\pi)$

(3) $\tan\frac{7}{3}\pi$　(4) $\cos 7\pi$

[1] それぞれ度数法の角は弧度法に，弧度法の角は度数法に直せ．

(1) $390°$　(2) $-120°$　(3) $1520°$

(4) $\frac{5}{4}\pi$　(5) $\frac{13}{3}\pi$　(6) $-\frac{11}{12}\pi$

[2] 次の三角関数の値を求めよ．

(1) $\sin\frac{5}{4}\pi$　(2) $\cos(-\frac{11}{6}\pi)$　(3) $\tan\frac{5}{3}\pi$

(4) $\sin(-\frac{9}{2}\pi)$　(5) $\cos 3\pi$　(6) $\tan(-\frac{7}{6}\pi)$

例題 2

次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

(2) $y = 2\cos x$

(3) $y = \tan x$

(4) $y = -2\cos(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4})$

[3] 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = -\sin x$

(2) $y = \frac{1}{2}\cos 2x$

(3) $y = \tan\frac{\pi}{2}$

(4) $y = -\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

例題 3

次の方程式，不等式を解け．ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．

(1) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

(2) $4\sin^2 x + 2(1-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} \geqq 0$

(3) $\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$

(4) $\tan^2 x - 1 > 0$

[4] 次の方程式，不等式を解け．ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．

(1) $2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin x = 5 = 0$

(2) $\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x \geqq 0$

(3) $\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} < 0$

(4) $4\sin x\cos x - 2\sin x - 2\cos x + 1 < 0$

例題 4

次の等式を証明せよ．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

[5] $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$， $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$， $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $\cos(\alpha+\beta)$ (2) $\sin(\alpha-\beta)$ (3) $\tan(\alpha-\beta)$

例題 5

次の等式を証明せよ.

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

(3) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(4) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}, \quad \tan^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

[6] $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で $\tan\alpha = -\sqrt{7}$ のとき，次の値を求めよ.

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha$　　(4) $\sin 3\alpha$

[7] $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ.

例題 6

次の等式を証明せよ.

(1) $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$, where $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

[8] 次の方程式を解け.

(1) $\sin 2x + \sin 5x = 0$

(2) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

(3) $\cos x + \cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = 0 \qquad (0 \leqq x < 2\pi)$

(4) $\sin 2x + \sin 3x - \sin 7x = 0 \qquad (-\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{\pi}{2})$

(5) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -1 \qquad (0 \leqq x < 2\pi)$

(6) $\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = 0 \qquad (0 \leqq x < 2\pi)$

[9] 次の不等式を解け.

(1) $\sin 5x + \sin 3x > 0 \qquad (0 \leqq x < \pi)$

(2) $\cos 2x + 3\sin x \geqq 1 \qquad (0 \leqq x < 2\pi)$

(3) $\cos 8x + \cos 3x + \cos 2x < 0 \qquad (0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2})$

(4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 1 \qquad (0 \leqq x < 2\pi)$

例題 7

次の関数の最大値，最小値を求めよ

(1) $y = sinx + \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$.

(2) $y = 2\sin^2 x + \cos x - 1$

[10] 次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = 2\cos^2 x + \sin x - 1$

(2) $y = -\sqrt{2}\sin x + \sqrt{6}\cos x \qquad (0 \leqq x < \pi)$

[11] 関数 $y = \sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3} \qquad (0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2})$ の最大値と最小値を求めよ．

入試問題演習

[1] $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \dfrac{13}{27}$ $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき $\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(横浜国大)

[2] 次の問いに答えよ．

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく．$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $t = \sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，θ の方程式

$$2\sin\theta\cos\theta - 2(\sin\theta + \cos\theta) - k = 0$$

の解の個数は，定数 k の値によってどのように変化するかを調べよ．

(岐阜大)

[3] (1) $\sin 4x$ を $\sin x$ と $\cos x$ で表せ．

(2) 方程式 $\sin 4x = a\sin x$ が区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で 3 つの相異なる解を持つような実数 a の値の範囲を求めよ．

(兵庫県立大)

[4] 2 次関数 $f(x) = x^2 + (\cos\theta)x + \sin\theta - 1$ について，次の問に答えよ．
ただし，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする．

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ．

(2) 放物線 $y = f(x)$ と x 軸の共有点の個数が，定数 θ の値によって，どのように変わるか答えよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての解が $-1 < x < 1$ の範囲にあるような θ の値の範囲を求めよ．

(東京電機大)

[5] a, b を $a < b$ を満たす実数とし $f(\theta) = a\sin^2\theta + \sqrt{3}(b-a)\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$ とする.

(1) $f(\theta)$ を $a, b, \sin 2\theta, \cos 2\theta$ の式で表せ.

(2) 実数 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a と b を用いて表せ.

(日本女子大)

[6] 2 つの t の関数

$$\begin{cases} f(t) = t\cos\theta \\ g(t) = t\sin\theta - \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad \left(\theta \text{ は } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ の実数}\right)$$

を考える.

このとき，次の問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $g(t) \geqq 0$ を満たす t の範囲を θ を用いて表せ.

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値 L, $g(t)$ の最大値 H をそれぞれ θ を用いて表せ.

(3) θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき，L を θ の関数と考えることができる.
L が最大となるような θ の値を求めよ.

(立教大)

[7] $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ の値を求めるために

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = t$$

とおく.

このとき，以下の問いに答えよ.

ただし，$2\pi = 360^\circ$ である.

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ を t で表せ.

(2) すべての実数 θ に対して

$$\cos(5\theta) = P(\cos\theta)$$

となる 5 次の多項式 $P(x)$ を一つ求めよ.

(3) t の値を求めよ.

(横浜市大)