数学　IIB 入試問題演習

[1] (1) 二つの実数 a, b が不等式

$$1 - a > a - b > b - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとき，$a, b, 1$ のうち最大なものは $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき，座標平面上において①を満たす点 (a, b) が動きうる領域は，二つの不等式

$$y > \boxed{\text{イ}}\,x - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$x > \boxed{\text{ウ}}\,y - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

で与えられる。さらに，①を満たす a, b に対して，a, b および 1 を三辺の長さとする三角形があるという条件を付け加えたときに，点 (a, b) が動きうる領域は，上の②, ③ともう一つの不等式

$$x + y > \boxed{\text{エ}}$$

によって与えられる。この領域は三角形の内部であり，この三角形を D とする。

(2) 三角形 D の面積は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。三角形 D の外接円の方程式は

$$x^2 + y^2 - \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}(x + y) + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} = 0$$

である。また，三角形 D の内接円の中心の x 座標 α は

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

であり，半径は

$$\frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。

(センター試験)

[2] x, y が $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を満たすとき，

$$(2x-y+2)^2+(x-y-1)^2$$

の最大値と最小値を求めよう。

$$\begin{cases} s = 2x-y+2 \\ t = x-y-1 \end{cases}$$

とおき，x, y を s, t を用いて表すと，

$$\begin{cases} x = s + \boxed{\text{ア}}\,t + \boxed{\text{イ}} \\ y = s + \boxed{\text{ウ}}\,t + \boxed{\text{エ}} \end{cases}$$

となる。このとき，不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ より，$(s,\ t)$ の動く範囲は，不等式

$$\begin{cases} s + \boxed{\text{オ}} \leqq t \leqq s + \boxed{\text{カ}} \\ \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}s + \boxed{\text{ケ}} \leqq t \leqq \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{コ}} \end{cases}$$

で表される領域になる。したがって $(2x-y+2)^2+(x-y-1)^2$ は，$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\right)$ のとき最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり，$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{セ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ をとる。

(上智大)

[3] 原点を通り傾き t の直線 $y = tx$ を l_1 とし，原点を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。ただし $t > 0$ とする。また l_1, l_2 と円 $(x-1)^2+y^2=1$ との原点以外の交点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 点 P_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S を t で表せ。

(3) S の最大値を求めよ。

(東京電機大)

[4] (1) x 軸上の点 $\left(\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ から円 $(x-2)^2+y^2=4$ への接線は 2 つあり，それらの方程式は

$$y=\pm\sqrt{\boxed{ア}}\left(x-\frac{\boxed{イ}-\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\right)$$

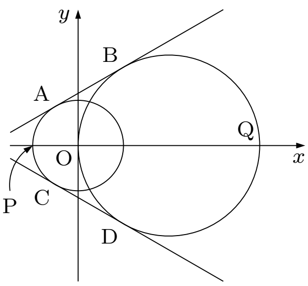
であり，接点の座標は $(\boxed{カ}-\sqrt{\boxed{キ}},\ \pm\boxed{ク})$ である。

(2) 2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ (x-2)^2+y^2=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

に共通に接する接線の方程式は

$$y=\pm\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}(x+\boxed{サ})$$



である。図のように，その接点を A, B, C, D とし，円①と x 軸の負の部分との交点を P, 円②と x 軸の正の部分との交点を Q とする。線分 AB の長さは $\sqrt{\boxed{シ}}$ である。また，円弧 APC と円弧 BQD および線分 AB と線分 CD とで囲まれた部分の面積は $\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}+\boxed{ソ}\pi$ である。

(近畿大)

[5] 座標平面に 3 点 A(1, 2), B(2, 1), C(4, 3) をとる。次の各問に答えよ。

(1) $\angle$ABC を求めよ。

(2) 線分 BC を BP : PC $= t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 P の座標を求めよ。

(3) 3 点 A, B, C を通る円を S とする。S の方程式を求めよ。

(4) 点 A と線分 BC 上の点 P を通る直線と円 S との交点で A 以外の点を R とする。三角形 ABC と三角形 ARC の共通部分の面積が $\dfrac{4}{3}$ であるとき，R の座標を求めよ。

(同志社大)

[6] 以下の設問に答えよ。

(1) a を正の数とする。座標平面上の直線 $y=2ax$ に関して，y 軸と対称な直線の方程式を求めよ。

(2) u, v は実数で，A(u, v), B$(-2, 0)$, C$(0, -1)$ を座標平面上の点とする。点 P が，B と C を端点とする線分 BC 上を動くとき，2 点 AP の距離が最小となる P の座標を求めよ。

(横浜市立大)

[7] 連立不等式

$$\begin{cases} (x-y+1)(5x-2y-10) \leqq 0 \\ (x^2+y^2-4)(5x+6y-50) \leqq 0 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする。点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ が領域 D を動くとき，次の (1), (2), (3) に答えよ。

(1) x のとる最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，y のとる最大値は $\boxed{\text{オ}}$, 最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

(2) $2x+y$ の最大値は $\boxed{\text{キ}\,\text{ク}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}-\dfrac{1}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) $x^2+(y-4)^2$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(東京理科大)

[8] 放物線 $y=2x^2+1$ 上に異なる 2 点 A, B をとり，線分 AB の中点を M とする。点 A における接線と点 B における接線の交点を C とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 CM と y 軸が平行であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{ACB}=30^\circ$, 点 B の x 座標が 1 であるとき，点 A の x 座標を求めよ。

(岩手大)

[9] xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$, $B : y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め図示せよ。

(北大)

[10] 関数 $y = x^2$ のグラフ C と，定点 $\mathrm{A}(0, a)$ $(a > 0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を P, Q とする。また，点 A を通り直線 l に垂直な直線 m と，曲線 C との交点を R, S とする。ここで，t は正の実数とし，P と R の x 座標は正，Q と S の x 座標は負であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) PQ^2 と RS^2 を a と t を用いて表せ。

(2) $u = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ とおき，四角形 PSQR の面積を T とするとき，T^2 を u を用いて表せ。

(3) 直線 l の傾き t が正の実数全体を動くとき，面積 T の最小値を求めよ。

(新潟大)

[11] 次の問いに答えよ．

(1) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$ を $\cos\theta$ で表すと，$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\boxed{\text{ア}}$ であるから，$\tan\dfrac{7\pi}{8}=\boxed{\text{イ}}$ である。

(大阪工大)

(2) $0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(大阪電気通信大)

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{3}{2}\pi\right)}$ は $x=\boxed{\text{ケコサシ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{スセ}}$ をとる。

(関西大)

[12] 次の関数 $y=-2\cos^3\theta+\cos 3\theta+3\cos\theta+3\sin^2\theta+a$
について，以下の問いに答えなさい。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ である。
$\cos\theta=x$ として，この関数を x の関数で表すと $y=\boxed{\textbf{(a)}}$ となり，x の定義域は $\boxed{\textbf{(b)}}$ となる。この関数 y は $x=\boxed{\textbf{(c)}}$ のとき，極大値をとる。ここで，y の最大値が 1 になるには $a=\boxed{\textbf{(d)}}$ であり，$x=\boxed{\textbf{(e)}}$ のとき最小値は $y=\boxed{\textbf{(f)}}$ である。このとき $y=0$ となる θ は $\boxed{\textbf{(g)}}$ である。

(明治薬科大)

[13] $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$, $0^\circ \leqq y \leqq 360^\circ$ のとき，x と y を未知数とする次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(中央大)

[14] xy 平面上の 3 点 O(0, 0), A(1, $-t$), B(0, $-t$) $\left(0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ に対し，y 軸上に B, O, C, D の順に並ぶ点 C, D を ∠BAO = ∠OAC = ∠CAD となるようにとる。また，線分 BA 上の点 E を 3∠BDE = ∠BDA となるようにとる。

(1) 直線 AC の方程式を求めよ。

(2) 直線 DE の方程式を求めよ。

(3) 直線 AC と直線 DE の交点を P(x_1, y_1) とするとき，$\dfrac{y_1}{x_1}$ の値を求めよ。

(大阪市大)

[15] a を実数とし，3 次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) a はどのような範囲にあるか。

(2) 3 つの解はいずれも -1 と 1 の間にあることを示せ。

(3) 三角関数の加法定理および 2 倍角の公式を用いて，3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を導け。

(4) 上の方程式の 3 つの解のうち，最も大きなものを $\cos\theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ と表す。このとき，残りの 2 つの解は $\cos(\theta + 120^\circ)$ と $\cos(\theta - 120^\circ)$ であることを示し，それらの大小を調べよ。

(長崎大)

[16] 空間内の 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta,\ \sqrt{1-\sin\theta}\right)$ と原点 O のつくる三角形 OPQ の面積の最大値および最小値を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ とする。

(一橋大)

[17] a は実数とする。$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ に対して $f(\theta) = (\cos 2\theta - 2\sin\theta - a)(\cos 2\theta - 2\sin\theta)$ とおく。次の問に答えよ。

(1) $t = \cos 2\theta - 2\sin\theta$, $x = \sin\theta$ とするとき，t を x を用いて表せ。また，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。

(神戸大)

[18] (1) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$ のとき $x = \boxed{\text{ア}}$ または $\boxed{\text{イ}}$ である。

(工学院大)

(2) $\log_4(1 + x^4) - 2\log_4 x$ の最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(芝浦工大)

(3) $a,\, b > 1$ に対して，$\log_{ab} \dfrac{a+b}{2}$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(上智大)

(4) 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{3}\log_3 125 + \log_{\sqrt{3}} 4 - \log_9 64 = \log_3 \boxed{\text{カ}}$$

(上智大)

[19] 次の値を求めよ。

(1) $\log_{10}\sqrt{15} - \dfrac{1}{2}\log_{10} 0.6 + \log_{10} 2$

(2) $(\log_3 4)(\log_4 2)(\log_2 3)$

(信州大)

[20] 2 つの関数 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ がある。

(1) $g(x) = -\dfrac{1}{\boxed{\text{アイ}}} \log_2 x$ と表される。

(2) 方程式 $f(x) + g(x) = 3$ の解は，$x = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3) 不等式 $f(x+1) + g(x+1) < 3$ の解は，$-1 < x < \boxed{\text{オカ}}$ である。

(4) $4^{f(8)} \times 8^{g(8)} = \boxed{\text{キク}}\sqrt{2}$ である。

(5) 方程式 $4^{f(x)} - 2 \times 4^{-g(x)} - 3 = 0$ の解は，$x = \boxed{\text{ケコ}}$ である。

(東北工大)

[21] 連立方程式 $\begin{cases} \log_2 xy - 2^{2y} = 2 \\ \log_4 \sqrt{xy} + 2^{2y-2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ を解け。

(弘前大)

[22] 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) 6^{100} は何桁の数か。

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数があらわれるか。

(福島大)

[23] 3 次関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) $y=f(x)$ において，傾きが最小となる接線の方程式を求めよ。

(神奈川大)

[24] 曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が x 軸と 3 点で交わり，その交点の x 座標 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ が次の 3 条件をみたしているとする。

$$\alpha+\beta+\gamma=6 \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=18 \quad \alpha\beta\gamma=1$$

このとき，

(1) $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$, $c=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $\alpha \leqq x \leqq \gamma$ の範囲を x が動く場合，y が最大になるのは $x=\boxed{\text{エ}}$ のときで最大値は $\boxed{\text{オ}}$, y が最小になるのは $x=\boxed{\text{カ}}$ のときで最小値は $\boxed{\text{キ}}$である。

(東海大)

[25] 関数 $f(x)=ax^3+(7-a^2)x^2+bx+c$ は，$x=-1$ で極小値を，$x=2$ で極大値をとり，極小値の絶対値の 2 倍が極大値に等しい。定数 a, b, c を求めよ。

(愛媛大)

[26] 関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ について以下の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け

(2) 直線 $y = kx$ と $y = f(x)$ の共有点の個数を k の値に応じて求めよ。

(お茶の水大)

[27] $0 \leqq \theta < 360$ とし，a は定数とする。

$$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$$

を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。

(京都大)

[28] 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ を C とする。C 上の点 $(0, 3)$, $(6, 15)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とするとき，次の問に答えよ。

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) C, l_1, l_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

(群馬大)

[29] x についての 2 次関数 $y=-x^2+2tx+2t^2-2t$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(t)$, 最小値を $m(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ のとき $M(t)$ と $m(t)$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(M(t)-m(t))dt$ を求めよ。

(福岡大)

[30] $0<a<2$ とする。曲線 $y=x^2$ と直線 $y=a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$, 曲線 $y=x^2$ $(x \geqq a)$ と 2 直線 $y=a^2$, $x=2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $T(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)+T(a)$ の最小値を求めよ。

(大同工大)

[31] 放物線 $C : y = 25 - 36x^2,\ 0 \leqq x$, がある。

C と x 軸と直線 $x = a$ で囲まれる図形の面積を S_1, C と x 軸と直線 $x = a+1$ で囲まれる図形の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和を S とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ とする。

(1) S を a の式で表せ。

(2) S の最大値と最小値を求めよ。また，その場合の a の値を示せ。

(早稲田大)

[32] 座標平面上の曲線 $C : y = |x^2 - 1|$ と傾き a の直線 $l : y = a(x+1)$ が異なる 3 点で交わっているとする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と l で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S を a を用いて表せ。

(3) S が最小になる a の値を求めよ。

(金沢大)

[33] $a \geqq 0$ とし，関数 $f(x)=3|x^2-1|$ について，$S(a)=\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx$ とする。

(1) $S(0)$ を求めなさい。

(2) $S(a)$ を求めなさい。

(3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めなさい。

(大分大)

[34] 放物線 $y=x^2$ について，次の問に答えよ。

(1) x の値が p から q まで変化するときの平均変化率と点 $\left(r,\, r^2\right)$ における接線の傾きが等しいとき，r を p と q で表せ。ただし，$0<p<q$ とする。

(2) (1) の条件のもとで，放物線 $y=x^2$, x 軸，直線 $x=p$ および直線 $x=r$ により囲まれた部分の面積を S_1 とし，また放物線 $y=x^2$, x 軸，直線 $x=q$ および直線 $x=r$ により囲まれた部分の面積を S_2 とする。$S_1:S_2=1:3$ であるとき，q を p で表せ。

(防衛大)

[35] a を正の実数とし，関数

$$F(x)=\int_x^{x+a} \Big||t|-1\Big|\, dt$$

を考える。

(1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2) $0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3) $a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。

(北大)

[36] $\triangle$OAB において，OA $= 2$, OB $= 3$, $\angle$AOB $= 120^\circ$ とする。辺 AB の中点を M, 辺 AM の中点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき，次の各問いに答えなさい。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めなさい。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表しなさい。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の値を求めなさい。

(4) $\angle\mathrm{MON} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(足利工大)

[37] 2 つのベクトル $\vec{a} = (1,\, x)$, $\vec{b} = (2,\, -1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ が垂直であるとき，x の値を求めよ。

(2) $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ が平行であるとき，x の値を求めよ。

(静岡大)

[38] 台形 ABCD において AB // DC, AB $= 6$, CD $= 4$ とする。辺 AB, AD の中点をそれぞれ M, N とし，線分 MN 上に点 P を，MP : PN $= 1 : 3$ となるようにとる。さらに直線 CP と辺 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) CP : PQ を求めよ。

(3) AD $= 5$, $\angle$BAD $= 60^\circ$ のとき，CQ の長さを求めよ。

(武蔵工大)

[39] a および b を正の定数とし，$0 < |\theta - \alpha| < \pi$ を満たす実数 α, θ について，座標平面上に二点 $\mathrm{A}(a\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$, $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に対し，次の問に答えよ。

(1) 点 P と直線 OA の距離を求めよ。

(2) α が与えられているとして，△OAP の面積が最大になるような θ を求めよ。

(3) θ を (2) の条件を満たすように定めるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の（α を変化させたときの）最大値を求めよ（α の値は不要）。

(奈良県立医大)

[40] 平面上の三角形の頂点を O, A, B とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とおく。また，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\overrightarrow{a} + (\sin\theta)\overrightarrow{b}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を $\sin\theta : \cos\theta$ に内分する点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, θ を用いて表せ。

(2) $\sin\theta + \cos\theta > 1$ を示せ。これより，線分 AB と線分 OP が交わることを説明せよ。

(3) 三角形 OAB と四角形 OAPB の面積比を θ を用いて表せ。

(4) 四角形 OAPB の面積が最大になるときの θ の値を求めよ。

(広島大)

[41] 三角錐(すい)の頂点を A, B, C, D とする。直線 AB 上に点 A と異なる点 P をとり，直線 BC 上に点 B と異なる点 Q をとり，直線 CD 上に点 C と異なる点 R をとり，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = a\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QC}} = b\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RD}} = c\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ となるように実数 a, b, c を定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = p\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = q\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ と表せば，$p = \boxed{\text{ア}}$, $q = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = r\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CR}} = s\overrightarrow{\mathrm{AP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と表せば，$r = \boxed{\text{ウ}}$, $s = \boxed{\text{エ}}$, $t = \boxed{\text{オ}}$ である。

(3) また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = u\overrightarrow{\mathrm{AP}} + v\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + w\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と表せば，$u = \boxed{\text{カ}}$, $v = \boxed{\text{キ}}$, $w = \boxed{\text{ク}}$ である。

(4) 3 点 P, Q, R を通る平面と直線 AD が交わるとき，その交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{SD}} = x\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ とおけば，$x = \boxed{\text{ケ}}$ である。

(中央大)

[42] 四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 1 の比に内分する点を D, 辺 OC を 1 : 2 の比に内分する点を E, 辺 AB を 3 : 1 の比に内分する点を F とする。また，辺 BC を $s : 1-s$ の比に内分する点を G とする。ただし，$0 < s < 1$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, s を用いて表せ。

(3) 3 点 D, E, F の定める平面上に点 G があるとき，s の値を求めよ。

(東京歯科大)

[43] 原点 (0, 0, 0) を O とする座標空間において，点 A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(3, 4, 1) をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，3 点 A, B, C を通る平面を α とする。

(a) 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ となる実数 r, s, t を x, y, z で表しなさい。

(b) 点 P が平面 α 上にあるとき，x, y, z が満たす方式を求めなさい。

(c) 点 (4, 5, 7) を D とする。平面 α 上の点 H が $\mathrm{DH} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{DH} \perp \mathrm{BC}$ を満たすとき，H の座標を求めなさい。

(東京理科大)

[44] 空間において，4 点 A(−1, 1, 0), B(2, 0, −1), C(0, −1, 1), D(0, −2, −2) を頂点とする四面体を考える。

(1) 点 B, C, D から xy 平面に下ろした垂線をそれぞれ BB′, CC′, DD′ とする。このとき，点 A, B′, C′, D′ を xy 平面上に図示せよ。

(2) yz 平面と辺 AB の交点を P とする。点 P の座標を求めよ。

(3) 三角形 CDP の面積を求めよ。

(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

(東京女子大)

[45] 四面体 OABC において，OA = OC であるとする。さらに，BC を 1 : 2 に内分する点を D, AD を 3 : 1 に内分する点を E とするとき，OE ⊥ AC であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{e}$ とおくとき，次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{e}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ であることを示せ。ただし，記号 $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ はベクトル $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ の内積を表す。

(3) OA : OB = 2 : 1, OE ⊥ BC であるとき，∠AOC を求めよ。

(宮崎大)

[46] a, c を実数とする。

空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, a), B(2, 1, 5), C(0, 1, c) は同一平面上にある。

(1) c を a で表せ。

(2) 四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。

(一橋大)

[47] 初項 1, 公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項 2, 公差 2 の等差数列を $\{b_n\}$ とする。二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のすべての項を小さいものから順に並べた数列を $\{c_n\}$ とするとき，$c_{100} = \boxed{ア}$ である。また，$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{100} = \boxed{イ}$ である。

(愛知工業大)

[48] 1 から 710 までの自然数のうち，36 で割り切れるものは全部で $\boxed{アイ}$ 個ある。1 から 710 までの自然数のうち，12 で割り切れるが 18 で割り切れないものは全部で $\boxed{ウエ}$ 個あり，それらの和は $\boxed{オカキクケ}$ である。

(大同工業大)

[49] 数列 $\{a_n\}$ を初項が 1 で公差が $\dfrac{4}{3}$ の等差数列とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{ア}$ である。よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{イ}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = \boxed{ウ}$ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = [a_n]$ と定める。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

$b_n = 103$ であるとき，$n = \boxed{エ}$ である。$b_n \leqq 50$ を満たす b_n すべての和は $\boxed{オ}$ である。

m が正の整数のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{3m} b_k = \boxed{カ}$ である。

(東海大)

[50] $\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \cdots$
について，この順に並べてできる数列

$1, 2, 3, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots$

に関し，次の問に答えよ。

(1) この数列に初めて 99 が現れるのは第 $\boxed{\text{アイウエ}}$ 項である。

(2) 数列の第 1999 項は，第 $\boxed{\text{オカ}}$ 群の中の第 $\boxed{\text{キク}}$ 番目であり，その数は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である。ただし，$\{1\}$ を第 1 群，$\{2, 3\}$ を第 2 群，$\{3, 4, 5\}$ を第 3 群，$\cdots$ とする。

(東京薬科大)

[51] 等差数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の初項から n 項までの和を S_n とする。S_n を大きい順に並べかえると第 3 項までがそれぞれ 22, 21, 20 となるとき，この数列の一般項 a_n を求めよ。

(群馬大)

[52] 初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $S_n = 94$ となる n と d がちょうど一組ある。その n と d を求めよ。

(2) $S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。

(神戸大)

[53] 自然数 n に対し，$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ とする。S_n を n を用いて表せ。

(和歌山県立医大)

[54] 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が，$S_1 = 0,\ S_{n+1} - 3S_n = n^2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が満たす漸化式を a_n と a_{n+1} の関係式で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(徳島大)

[55] 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を $S_n = -n^3 + 21n^2 + 65n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。

(1) 初項 a_1 を求めなさい。

(2) 一般項 a_n を求めなさい。

(3) $a_n > 151$ を満たす自然数 n の範囲を求めなさい。

(大分大)

[56] 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
を満たすとする。$a_1 = 3, a_2 = 5$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a_3 と a_4 の値を求めよ。

(2) $a_{n+1} - a_n$ を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(宇都宮大)

[57] ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B に居る場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B に居る確率をそれぞれ $P_A(n), P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A に居るものとし（つまり，$P_A(0) = 1, P_B(0) = 0$ とする），持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1), P_A(2), P_A(3)$ および $P_B(1), P_B(2), P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1), P_B(n+1)$ を $P_A(n), P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n), P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(北大)

[58] 自然数 n に対して $a_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+1}a_n$ を示せ。

(2) 数学的帰納法を用いて，$a_n \leqq \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$ が成り立つことを示せ。

(岩手大)

[59] N を自然数とする。

$$a_1 = N, \quad a_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(a_n + \left\lfloor \frac{N}{a_n} \right\rfloor\right) \right\rfloor \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ。ここで $\lfloor x \rfloor$ は x をこえない最大の整数を表す。

(1) $a_n \geqq \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ を証明せよ。

(2) $a_n \leqq a_{n+1}$ ならば $a_n = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$ であることを証明せよ。

(千葉大)

[60] 点 A が数直線上をサイコロの出た目に応じて正の方向へ移動する。移動する距離は，出た目が 1 のときは 1, 2 のときは 2, 3 以上のときは 3 とし，点 A の出発点は原点とする。サイコロを n 回振ったときの点 A の位置を 3 で割った余りが，0 である確率を p_n, 1 である確率を q_n, 2 である確率を r_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) p_n と p_{n-1} の関係を求めよ。

(2) $p_n,\ q_n,\ r_n$ を求めよ。

(名古屋大)

[61] 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は関係式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{4a_n + b_n}{6} \\ b_{n+1} = \dfrac{-a_n + 2b_n}{6} \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たしており，$a_1 = 1,\ b_1 = -2$ である。

(1) $\{a_n\}$ は $4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{2^n a_n\}$ は等差数列であることを示せ。

(3) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(愛媛大)