微分法（１）　ー　導関数

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導関数の基本公式

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(g \circ f(x))' = g'(f(x))f'(x)$$

具体的な導関数の基本公式

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

特別な導関数の公式

$x = f(t),\ y = g(t)$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

例題１

次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^4(x^2+1)$

(2) $y = \dfrac{2x}{x-1}$

(3) $y = \sqrt[4]{3x-5}$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

[1] 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = x^2(1-x)$

(2) $y = (x^2+2x-1)(x-x^2)$

(3) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

(4) $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

(5) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(6) $y = \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+2}$

(7) $y = (x^2+1)^7$

(8) $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$

(9) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}$

(10) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2}{2x+1}}$

(11) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

(12) $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$

例題 2

次の関数を微分せよ.

(1) $y = \sin^3 x$

(2) $y = \cos 3x$

(3) $y = x^3 \sin x$

(4) $y = \sin(\cos x)$

(5) $y = \log 2x$

(6) $y = (x^2 + 1)e^{-3x}$

[2] 次の関数を微分せよ.

(1) $y = \cos x - x$

(2) $y = x \cos^2 x$

(3) $y = \sin(\frac{\pi}{6} - 2x)$

(4) $y = \tan^2 x^3$

(5) $y = \cos^4 x^3$

(6) $y = x^2 \sin^3 2x$

(7) $y = \cos^3 x \sin x^3$

(8) $y = e^{\frac{x}{2}}$

(9) $y = x^2 e^{-x}$

(10) $y = \log \sqrt{x+1}$

(11) $y = e^x \log x$

(12) $y = \dfrac{x \log x}{\sin x^2}$

例題 3

[1] 両辺の対数をとることにより．次の関数を微分せよ．

(1) $y = x^x$　　(2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+4}}$

[2] 次の関数の第 2 次導関数を求めよ．

(1) $y = \sqrt{x+1}$　　(2) $y = \log x$

[3] 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt[x]{x}$　　(2) $y = x^{x^2}$

(3) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(3x-1)^2(2x+1)^4}$　　(4) $y = x^\alpha \log x$

[4] 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$ について，$f''(0)$ を求めよ．

微分法（2）　ー　微分の応用

例題 4

次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$　　(2) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

(3) $y = x\sqrt{1 - x}$　　(4) $y = \sqrt[3]{x^2(x - 2)}$

[5] 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$　　(2) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 2}$

(3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x}}$　　(4) $y = \sqrt[3]{x^2(x + 2)}$

[6] 関数 $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$ の増減，極値を調べ，そのグラフの概形をかけ．また，このグラフに変曲点があればそれも求めよ.

[7] 曲線 $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}(x + 1)^{\frac{2}{3}}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 極値とグラフの凹凸を調べよ.

(2) この曲線の概形をかけ.

例題 5

次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $y = \dfrac{1}{e^x + x^{-x}}$

(3) $y = \log \dfrac{x-1}{x}$

(4) $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

[8] 次の関数のグラフをかけ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を用いてもよい.

(1) $y = \cos x - \dfrac{1}{2}\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $y = 2\sin x + \sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(3) $y = xe^{-x}$

(4) $y = x\log x$

[9] $f(x) = (\dfrac{1}{x})^{\log x} \quad (x > 0)$ の増減，凹凸を調べて，グラフの概形をかけ.

例題 6

$y = e^{\frac{x}{3}}$ と $y = a\sqrt{2x-2} + b$ が， $x = 3$ で共通接線を持つとき，a と b の値を求めよ．

[10] 次の問いに答えよ．

(1) $y = x + \sin x$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ に点 $(1, -\dfrac{1}{2})$ から引いた接線の方程式を求めよ．

例題 7

次の問いに答えよ.

(1) $e^x + x - 1 = 0$ の実数解の個数を求めよ.

(2) $x > -1$ のとき，不等式 $x \geqq \log(x+1) \geqq \dfrac{x}{x+1}$ が成り立つことを示せ.

[11] 次の問いに答えよ.

(1) $x^5 + 1 = k(x+1)^5$ の相異なる実数解の個数を求めよ.

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ.

入試問題演習

[1] 次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^{-ax}\sin bx$（ただし, $a,\ b$ は定数とする）

(2) $y = x^3\sqrt{1+x^2}$（ただし $x > 0$ とする）

(信州大)

[2] 曲線 $y = x\sqrt{1-x^2}$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(広島市立大)

[3] 関数 $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極値をすべて求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ の漸近線の方程式をすべて求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。

(東京電機大)

[4] 直線 $y = x+1$ を l とし，曲線 $y = \log x$ 上の点を P とする。P と l の距離が最小となるとき，P の座標を求めなさい。また，そのときの P と l の距離を求めなさい。

(城西大)

[5] $f(x) = e^{x-c}$（c は定数）の逆関数を $g(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

(東北大)

[6] xy 平面上に放物線 $C : y = x^2$ と，C と共有点をもたない直線 $l_t : y = tx - 1$ がある。ただし，t は正の定数とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) t の値の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 P と l_t 上の点 Q との距離が最小になるときの P, Q をそれぞれ P_t, Q_t とおく。P_t の座標を t を用いて表せ。

(3) 直線 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ が C によって切り取られる線分の長さを $f(t)$ とする。t が (1) で求めた範囲を動くときの $f(t)$ の最小値を求めよ。

(福井医科大)

[7] (1) 不等式 $e^x > 1 + x$ $(x > 0)$ を証明せよ。

(2) 不等式 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $(x > 0)$ を証明せよ。

(3) n は自然数とする。n についての数学的帰納法によって，不等式 $e^x > 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ $(x > 0)$ を証明せよ。

(4) n は自然数とする。$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$ を証明せよ。

(大阪教育大)

[8] xyz 空間の 2 点 P, Q を, $\triangle$OPQ（O は原点）の面積が正の一定値 S となるように動かす。P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP$'$, QQ$'$ とし，$\triangle$OP$'$Q$'$ の面積を S_1 とする。ただし，O, P$'$, Q$'$ が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする。同様に P, Q から yz 平面，zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする。

(1) $S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$ を証明せよ。

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値，最小値を求めよ。

(東京工大)