

積分 (1) ー 不定積分と定積分

基本公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

置換積分法

$t = g(x)$ とおくと,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$$

部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

例題 1

次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int (3^x + x^3) dx$$

$$(2) \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(3) \int (2 \sin 2x - \cos x + e^x) dx$$

$$(4) \int \sin^2 x dx$$

[1] 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \sqrt{x}(x+1)^2 dx$$

$$(2) \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})^2 dx$$

$$(3) \int (7^x + x^7 - \frac{1}{x}) dx$$

$$(4) \int \frac{3x^3 - x^2}{x^2} dx$$

$$(5) \int \frac{\sqrt[4]{x^3} - x^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(6) \int (\sin x - 3 \cos x) dx$$

$$(7) \int (x^2 - \frac{1}{\cos^2 x}) dx$$

$$(8) \int (5 \cos x + e^x) dx$$

$$(9) \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$$

$$(10) \int (\sin^2 x - 1) dx$$

$$(11) \int \cos x(3 + 2 \tan x) dx$$

$$(12) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx$$

例題 2

次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$$

$$(3) \int \sin x \cos 2x dx$$

$$(2) \int \frac{1}{4x^2 - 1} dx$$

$$(4) \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} dx$$

[2] 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx$$

$$(3) \int \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 3x + 1} dx$$

$$(5) \int \frac{x^4 + x^2 + x - 2}{x^2 + 2} dx$$

$$(7) \int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$$

$$(9) \int \sin 3x \sin 2x dx$$

$$(11) \int (\sin x + \cos x)^2 dx$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x} dx$$

$$(4) \int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$$

$$(10) \int \cos^4 x dx$$

$$(12) \int \tan^2 x dx$$

例題 3

次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int (x^2 + 1)(x + 2)^8 dx$$

$$(2) \int x e^{-x^2+1} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{1 + e^x} dx$$

$$(4) \int \sin^5 x \cos^2 x dx$$

[3] 次の不定積分を求めよ

$$(1) \int x \sqrt{x+1} dx$$

$$(2) \int x^2 (x-1)^6 dx$$

$$(3) \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$(4) \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(6) \int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$(7) \int \frac{(\log x)^3}{x} dx$$

$$(8) \int \frac{\sqrt[3]{\log x}}{x} dx$$

$$(9) \int x^2 \sin(1-x^3) dx$$

$$(10) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$(11) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$(12) \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

例題 4

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \log x dx$

(2) $\int x e^{x+1} dx$

(3) $\int x \sin x dx$

(4) $\int e^x \cos x dx$

[4] 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int x \log x dx$

(2) $\int \frac{\log(x+1)}{x^2} dx$

(3) $\int x^n \log x dx$

(4) $\int \frac{\log x}{(x+1)^2} dx$

(5) $\int x^2 e^x dx$

(6) $\int (x+1)e^x dx$

(7) $\int x \cos x dx$

(8) $\int e^x \sin x dx$

(9) $\int x^2 \sin x dx$

(10) $\int x^3 \cos 2x dx$

(11) $\int e^x \cos^2 x dx$

(12) $\int \sin^4 x dx$

例題 5

次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_1^2 \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$$

$$(4) \int_0^1 x e^x dx$$

[5] 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$(2) \int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} dx$$

$$(4) \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

$$(5) \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx$$

$$(6) \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$(7) \int_{-1}^0 x \cos(1-x^2) dx$$

$$(8) \int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx$$

$$(9) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$(10) \int_0^3 \log(1+x) dx$$

$$(11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$(12) \int_1^e \frac{\log x}{x^3} dx$$

例題 6

次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(3) \int_{-3}^2 |x^2 - 4| dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx$$

$$(4) \int_0^\pi |\sin x + \cos x| dx$$

[6] 次の定積分を求めよ.

$$(1) \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$(3) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(5) \int_{-1}^1 \sqrt{|x|} dx$$

$$(7) \int_{-1}^2 e^{|x|} dx$$

$$(2) \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$$

$$(4) \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{4+x^2} dx$$

$$(6) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$$

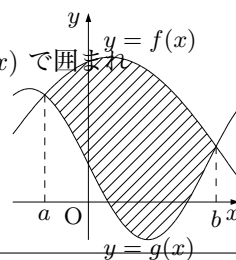
$$(8) \int_0^{2\pi} |2\cos^2 x + \sin x - 1| dx$$

積分（２） ー 積分の応用

面積

$a \leq x \leq b$ ならば、 $f(x) \geq g(x)$ のとき、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は、

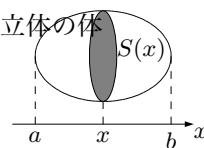
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



体積

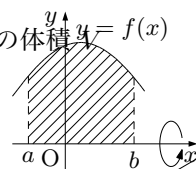
x 軸に垂直な平面で切ったときの断面積が $S(x)$ ($a \leq x \leq b$) になる立体の体積 V は、

$$V = \int_a^b S(x) dx$$



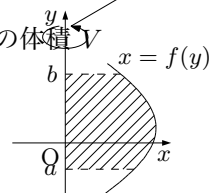
曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は、

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$



曲線 $x = f(y)$ ($a \leq y \leq b$) を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は、

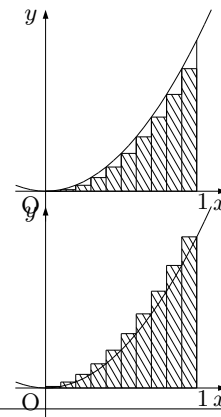
$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$



区分求積法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$



定積分と不等式

$a \leq x \leq b$ のとき,

$f(x) \leq g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

例題 1

方程式 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) で表される曲線と, x 軸, y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

[1] 次の曲線, 直線および x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(1) $y = \frac{x}{x+1}$, $x = -2$, $x = 2$

(2) $y = \sqrt{|x|}$, $x = -1$, $x = 1$

(3) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x = -2$, $x = 2$

(4) $y = \sin x + \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

例題 2

- (1) 曲線 $y = xe^{-x}$ の変曲点における接線の方程式を求めよ.
(2) (1) の曲線とその変曲点における接線と y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

[2] 次の曲線や直線によって囲まれる図形の面積を求めよ.

- (1) $y = x^3, x = y^3$
(2) $y = \sin x, y = \cos 2x$ ($0 < x < 2\pi$)
(3) $x = 5 \cos t, y = 3 \sin t$
(4) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

- [3] (1) 2 曲線 $y = ax^2$ と $y = \log x + \frac{1}{2}$ が接するように定数 a の値を求めよ.
(2) (1) のとき, (1) の 2 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ.

例題 3

次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 $y = \log x$ ($1 \leq x \leq e$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ.
- (2) 2 曲線 $y = x^3$, $x = y^2$ によって囲まれた図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ.

[4] 次の曲線や直線によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$

(2) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $y = 0$

(3) $y = x^3$, $x = y^3$ ($x \geq 0$)

(4) $y = e^{-|x|}$, $y = 1 - |x|$, $x = \pm 1$

例題 4

曲線 $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

[5] 曲線 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

[6] 関数 $f(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$ ($x \geq 0$) について次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ について、増減、極値、凹凸および変曲点を調べ、そのグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ は用いてよい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = a + 1$ ($a \geq 0$) で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ を a を用いて表せ。また、 $V(a)$ を最大にする a の値を求めよ。

例題 5

[1] 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

[2] 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log x < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

[7] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 3\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \cdots + n\sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+a^2} + \frac{1}{n+2a^2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)a^2} \right)$$

[8] 次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) < \int_1^n f(x) dx < f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

(2) (1) の結果を用いて, 次の不等式を示せ.

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

[9] 次の不等式を証明せよ.

$$(1) 1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} dx < \frac{\pi}{6}$$